차 례

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업시대, 지식경제시대에 들어선 오늘 수학의 지식과 방법을 모르고서는 현대과학과 기술을 배울수도 없고 발전시킬수도 없다.

바로 그렇기때문에 수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 된다.

시대의 변천에 따르는 사람들의 생활과 실천의 요구로부터 수와 도형에 관한 단편적인 지식의 축적으로 발생한 수학은 오늘 모든 과학과 기술의 기초로 되는 현대수학으로까지 발전하여왔다.

수학을 잘 배워 그 방법을 잘 익히면 머리가 트이고 모든 사물현상을 조리있게 보고 판단하는 힘이 생기며 과학적인 사고능력을 키울수 있다.

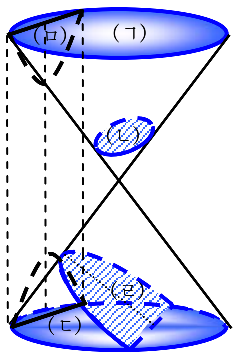
아무리 복잡한 수학공식이나 원리라고 하여도 자기 머리로 사고하고 처음부터 리치를 차근차근 따져가면 그것을 확고하게 습득할수 있으며 높은 수학적지능을 소유하면 그 어떤 어려운 문제도 쉽게 풀수 있고 새로운 공식도 발견할수 있다.

6학년 수학에서는 벡토르와 도형의 방정식, 미분과 적분, 확률과 통계 등에 대하여 배운다.

우리는 자기 땅에 발을 붙이고 눈은 세계를 보며 조선을 위하여 배우고 또 배워 내 나라 내 조국을 과학과 기술로 빛내이는 앞날의 훌륭한 인재가 되여야 한다.

제1장. 벡토르와 도형의 방정식

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



벡토르

평면에서 직선의 방정식

원뿔곡선의 방정식

공간에서 평면과 직선의 방정식

구면과 기둥면의 방정식

제 1 절. 벡 토 르

1. 벡토르에 대한 개념

일상 생활에서 우리는 질량, 온도와 같이 크기만을 가지는 량들과 속도, 힘과 같이 크기와 방향을 가지는 량들을 대상하게 된다.

크기와 방향을 가진 량을 **벡토르**라고 부 르고 기하학적으로 방향선분으로 고찰하며 그것의 두 끝점을 잡아서 $\overrightarrow{AB}$ 로 표시한다.

벡토르 $\overrightarrow{AB}$ 에서 A를 벡토르의 **첫점**, B를 벡토르의 **끝점**이라고 부른다.

벡토르 $\overrightarrow{AB}$ 에서 선분 AB의 길이를 $\overrightarrow{AB}$ 의 **크기** 또는 **길이**라고 부르고 $|\overrightarrow{AB}|$ 로 표시한다.

벡토르는 한개의 글자를 가지고 $\vec{a}$ 또는 $\boldsymbol{a}$ 로 표시하기도 한다.

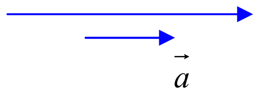


그림 1-1

길이가 1인 벡토르를 **단위벡토르**라고 부른다.

벡토르라고 하면 보통 크기와 방향만을 가지는것으로서 그 위치에는 관계가 없는것으로 본다.

두 벡토르 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{CD}$ 의 크기와 방향이 같을 때 그 두 벡토르는 **같은벡토르**라고 부르고 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 로 표시한다.

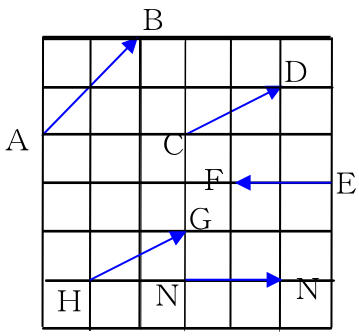


그림 1-2

찾 기 그림 1-2 에는 여러가지 벡토르들이 표시되여 있다. 크기가 같은 벡토르, 같은벡토르, 크기는 같은데 방향이 반대인 벡토르들을 찾아보아라.

평면에서 한 점 O를 잡고 O를 첫점으로 하는 벡토르만 생각하여도 평면의 모든 벡토르를 생각하는것으로 된다. 이때 벡토르 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 를 각각 점 A, B, C의 **위치벡토르**라고 부른다. (그림 1-3)

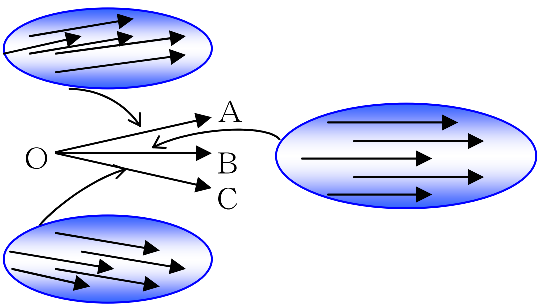


그림 1-3

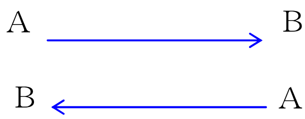


그림 1-4

벡토르 $\overrightarrow{AB}$ 가 주어져있다. 이때 $\overrightarrow{BA}$ 를 벡토르 $\overrightarrow{AB}$ 의 **반대벡토르**라고 부르고 $-\overrightarrow{AB}$ 로 표시한다.(그림 1-4)

크기가 0인 벡토르 즉 $\overrightarrow{AA}$ 를 **령벡토르**라고 부르고 $\vec{0}$ 로 표시한다.

2. 벡토르의 합과 차

우리는 두 벡토르 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 의하여 만들어지는 평행4변형 ABCD의 대각선 벡토르 $\overrightarrow{AC}$ 를 두 벡토르 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 합이라고 배웠다.

서로 평행이 아닌 두 벡토르 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 동일한 첫점 O를 가지면 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 로 표시할수 있고 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 를 변으로 하는 평행4변형 OACB의 대각선으로 표시된 벡토르 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 에 의하여 벡토르 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 합을 정의할수 있다. 즉 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 일 때 $\vec{c}$ 를 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 벡토르의 합이라고 부르며 이 방법을 벡토르합의 평행4변형법칙이라고 부른다. 여기서 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ 이므로 수학에서는 벡토르의 합을 보통 다음과 같이 정의한다.

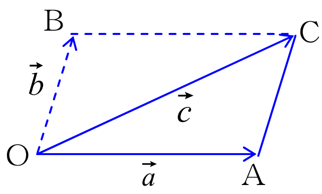


그림 1-5

벡토르 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 **합이라는것은** $\vec{a}$ 의 끝점과 $\vec{b}$ 의 첫점을 일치시키고 $\vec{a}$ 의 첫점을 첫점으로 하고 $\vec{b}$ 의 끝점을 끝점으로 하는 새 벡토르 $\vec{c}$ 를 말한다.

알아보기 그림 1-6을 보고 벡토르의 더하기에서 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립하는가를 알아보아라.

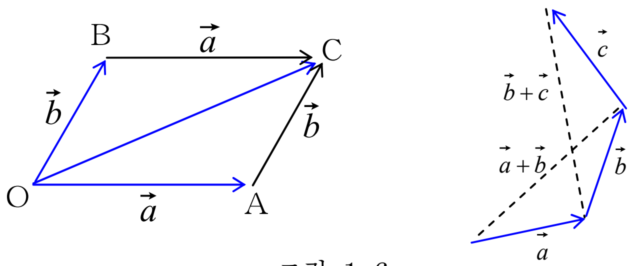


그림 1-6

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (바꿈법칙)

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (묶음법칙)

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$

벡토르 $\vec{a}+(-\vec{b})$ 를 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 차라고 부르고 $\vec{a}-\vec{b}$ 와 같이 표시한다.

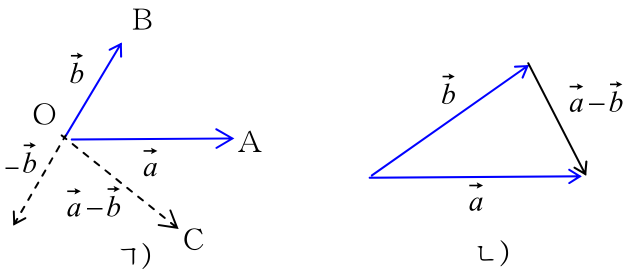


그림 1-7

그림 1-7의 ㄱ)에서 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ 이므로 두 벡토르 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 차는 ㄴ)에서와 같이 구한다.

문 제

1. 다음 명제들에서 옳은것을 찾아보아라.
   1) 단위벡토르들은 다 같다.
   2) 서로 반대벡토르인 두 벡토르의 크기는 같다.
   3) 령벡토르와 수 0의 의미는 같다.
2. 평행4변형 ABCD에서 점 E, F, G, H는 매개 변의 가운데점이다.(그림 1-8)
   1) $\overrightarrow{AG}$ 와 같은 벡토르, 반대벡토르들을 말하여라.
   2) $\overrightarrow{AE}$ 와 같은 벡토르, $\overrightarrow{OB}$ 의 반대벡토르들을 말하여라.

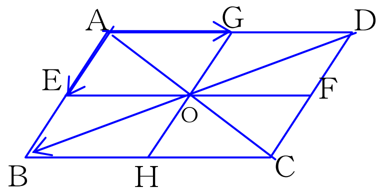


그림 1-8

3. $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$ 가 그림 1-9와 같을 때

   $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{OD_1}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

   $\overrightarrow{OD_2}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

   인 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OD_1}$, $\overrightarrow{OD_2}$ 를 그려라.

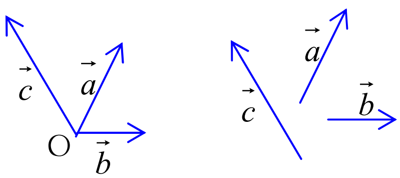


그림 1-9

4. 평행4변형 ABCD의 대각선의 사귐점을 O라고 하고 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 라고 할 때 벡토르 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 표시하여라.
5. 평행4변형 ABCD에서

$$\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right|$$

를 만족시키는 4각형은 어떤 4각형인가?

3. 벡토르와 수와의 적

령 아닌 벡토르 $\vec{a}$ 를 두번 더하면 $\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$ 이다. 이것은 $\vec{a}$ 의 2배로서 수 2 와 $\vec{a}$ 의 적이다.

이 사실을 일반화하여 벡토르 $\vec{a}$ 와 수 λ 가 주어졌을 때 다음과 같은 벡토르를 $\vec{a}$ 에 수 λ 를 곱한 **적**이라고 부르고 $\lambda\vec{a}$ 로 표시한다. (그림 1-10)

1) $\left|\lambda\vec{a}\right|=|\lambda|\left|\vec{a}\right|$

2) $\lambda>0$일 때 $\lambda\vec{a}$ 는 $\vec{a}$ 와 방향이 같고

$\lambda<0$일 때 $\lambda\vec{a}$ 는 $\vec{a}$ 와 방향이 반대이며

$\lambda=0$일 때 $\lambda\vec{a}$ 는 령벡토르이다.

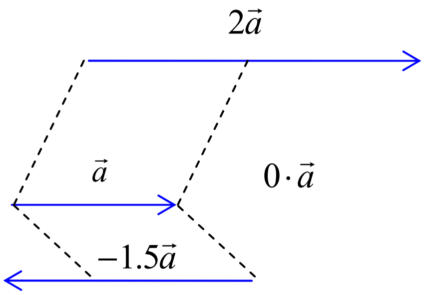


그림 1-10

벡토르와 수와의 곱하기는 다음과 같은 성질을 가진다.

$$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$
$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$
$$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda\left(\mu\vec{a}\right)$$
$$1\vec{a}=\vec{a}$$
$(\lambda,\ \mu\in\mathrm{R})$

두 벡토르가 방향이 같거나 반대일 때 두 벡토르는 **공선**이라고 부르며 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ 로 표시한다. (그림 1-11)

$\vec{0}$ 가 아닌 두 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 에 대하여

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=m\vec{a},\ m\in\mathrm{R}$$

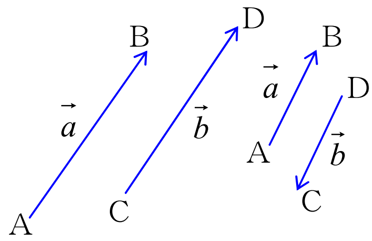


그림 1-11

례 점 A, B의 위치벡토르가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 일 때 AB의 가운데점 M의 위치벡토르를 구하여라. (그림 1-12)

(풀이) 점 M은 AB의 가운데점이므로

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

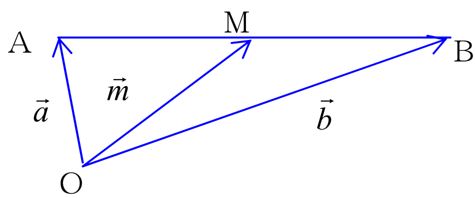


그림 1-12

그런데 $\overrightarrow{AM}=\vec{m}-\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ 이므로

$$\vec{m}-\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{m}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

즉 $\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

해보기 그림 1-13에서 점 p가 변 AB의 임의의 점일 때 $\vec{p}$ 는 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 에 의해 어떻게 표시되는가? 이때 $\vec{p}$ 를 AP:PB=m: n으로 보고 구하여라.

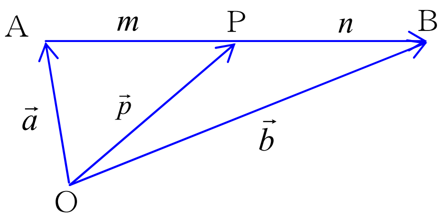


그림 1-13

일반적으로 다음 사실이 성립한다.

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

평면자리표계의 x축, y축에 그림 1-14과 같이 단위 벡토르 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 가 있다. 이것을 **자리표벡토르**라고 부른다.

이때 $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=y\vec{j}$ 이고 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 이다.

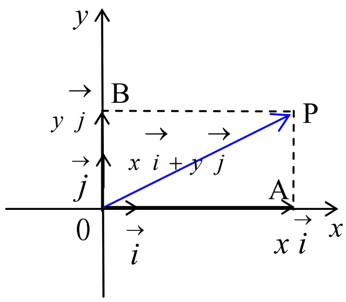


그림 1-14

문 제

1. 다음 명제가운데서 옳은것은 어느것인가?

1) 벡토르 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\lambda\overrightarrow{BA}$ 는 공선이다.

2) 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 다른 벡토르일 때 $\lambda\vec{a}=\vec{b}$ 인 λ가 있다.

3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 이면 네 점 A, B, C, D는 평행4변형을 이룬다.

2. 다음것을 간단히 하여라.

1) $2(\vec{a}+3\vec{b})+3(\vec{a}+4\vec{b})$　　　2) $3(2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})+4(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})$

3) $\frac{1}{3}(3\vec{a}-4\vec{c})+\frac{2}{3}(\vec{a}+6\vec{b})$

3. 그림 1-15의 바른6각형 ABCDEF에 대하여 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$일 때 다음의 벡토르를 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 의하여 표시하여라.

1) $\overrightarrow{FC}$　　2) $\overrightarrow{CD}$　　3) $\overrightarrow{BE}$

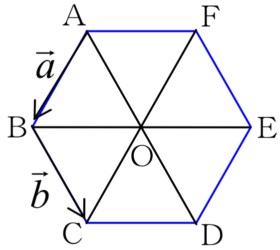


그림 1-15

4. 바른제형 ABCD의 한 밑변이 벡토르 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, 옆변이 벡토르 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$로 주어졌다. 제형의 밑각 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$일 때 제형의 나머지 변들과 대각선을 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 의하여 표시하여라.

5. 직각자리표계에서 A(9, 8), B(-3, 7)이 주어졌을 때 벡토르 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$를 자리표벡토르에 의해 표시하여라.

4. 벡토르의 성분

해보기 선분 AB와 직선 ℓ이 있다. 직선 ℓ에로의 선분 AB의 바른사영을 A_1B_1이라고 하고 직선 AB와 직선 ℓ사이각을 θ라고 하면 선분 AB, A_1B_1, 각 θ사이에는 어떤 관계가 있는가?(그림 1-16)

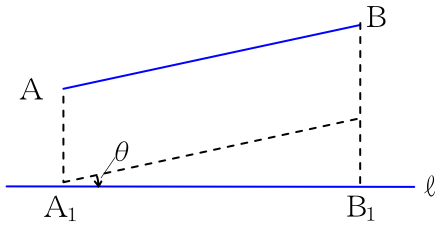


그림 1-16

수축 ℓ과 벡토르 $\overrightarrow{AB}$가 있다. 선분 AB의 직선 ℓ에 대한 바른사영을 A_1B_1로 표시하자. 이때 벡토르 $\overrightarrow{A_1B_1}$을 벡토르 $\overrightarrow{AB}$의 ℓ에 대한 **사영**이라고 부른다.

이제 ℓ에서 그 정방향의 단위벡토르를 $\vec{i}$라고 하면 $\overrightarrow{A_1B_1}=x\vec{i}$로 되는 수 x가 있다. 이 수 x를 ℓ에 대한 $\overrightarrow{AB}$의 **성분** 또는 **ℓ성분** 또는 **사영의 대수값**이라고 부르고 $P_{r_\ell}\overrightarrow{AB}$와 같이 표시한다. 즉

$$x=P_{r_\ell}\overrightarrow{AB}$$

이때
$$\overrightarrow{A_1B_1}=P_{r_\ell}\overrightarrow{AB}\,\vec{i}$$

두 벡토르 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 첫점을 한 점에 놓았을 때 두 벡토르가 놓이는 반직선들은 두 개의 각을 만든다. 이때 π를 넘지 않는 각을 두 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 사이의 **각**이라고 부르고 $\vec{a}\,^\wedge\vec{b}$로 표시한다.(그림 1-17)

$\vec{a}$와 $\vec{b}$ 사이의 각이 $\frac{\pi}{2}$일 때 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 **수직**이라고 말하고 $\vec{a}\perp\vec{b}$로 표시한다.

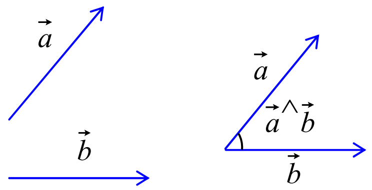


그림 1-17

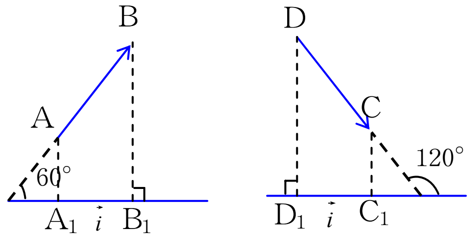


그림 1-18

례 $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{CD}|=8$일 때 $P_{r_i}\overrightarrow{AB}$, $P_{r_i}\overrightarrow{CD}$와 $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$를 구하여라.(그림 1-18)

(풀이) $A_1B_1=AB\ \cos60°$이므로

$$P_{r_i}\overrightarrow{AB}=3$$

따라서

$$\overrightarrow{A_1B_1}=3\vec{i}$$

다음으로 $C_1D_1=CD\cos60^{\circ}=8\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$이므로

$$P_{r_i}\overrightarrow{CD}=-4$$

따라서

$$\overrightarrow{C_1D_1}=-4\vec{i}$$

찾기 그림 1-19에서 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 그의 성분들사이에는 어떤 관계가 있는가를 알아보고 그의 성질을 찾아보아라.

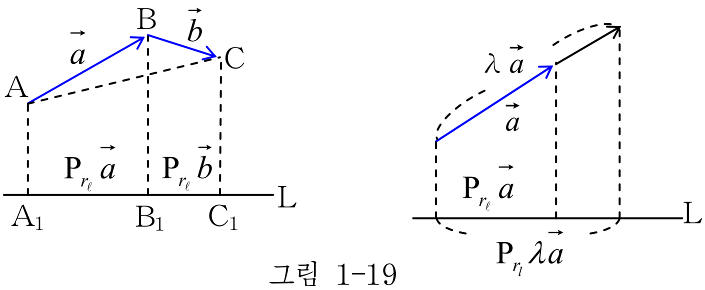


그림 1-19

$$\mathrm{P}_{r_\ell}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{P}_{r_\ell}\vec{a}+\mathrm{P}_{r_\ell}\vec{b}$$

$$\mathrm{P}_{r_\ell}(\lambda\vec{a})=\lambda\mathrm{P}_{r_\ell}\vec{a}$$

문 제

1. 축 L과 벡토르 $\overrightarrow{AB}$ 가 있다. $\overrightarrow{AB}\wedge L=\theta$ 일 때

$$\overrightarrow{B_1A_1}=-|\overrightarrow{BA}|\cos\theta\cdot\vec{i}$$

라고 말할수 있는가?
θ 가 뾰족각, 무딘각, 직각인 경우로 갈라서 따져보아라. (그림 1-20)

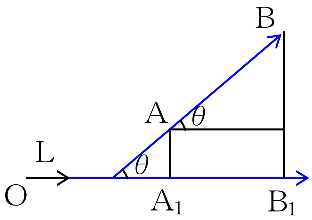


그림 1-20

2. 축 L과 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 있다. 다음의 경우에 $\mathrm{P}_{r_\ell}(\vec{a}+\vec{b})$ 를 구하여라.

1) $|\vec{a}|=2,\ \vec{a}\wedge L=30^\circ,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{b}\wedge L=45^\circ$

2) $|\vec{a}|=4,\ \vec{a}\wedge L=60^\circ,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{b}\wedge L=120^\circ$

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 는 단위벡토르들이고 x축과 이루는 각은 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π 이다. 벡토르 $3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$ 의 x축에 관한 성분을 구하여라.

5. 공간에서의 직각자리표계

공간의 한 점 O 와 O를 첫점으로 하는 세개의 단위벡토르를 다음과 같이 정한다.

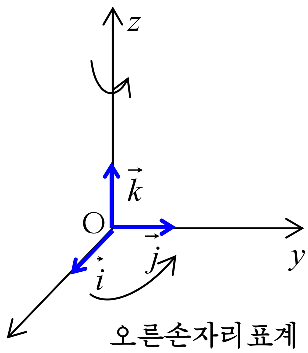
1° $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 는 둘씩 서로 수직이다.

2° $\vec{i}$ 로부터 $\vec{j}$ 로 가는 방향으로 오른나사못을 돌릴 때 오른나사못의 전진방향을 $\vec{k}$ 의 방향으로 정한다.

이때 공간에 직각자리표계가 도입되였다고 말하고 이것을 기호 $\{O:\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 와 같이 표시한다.

여기서 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 를 자리표벡토르라고 부른다.

그리고 O를 지나며 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 의 방향을 각각 정의 방향으로 잡은 축 Ox, Oy, Oz 를 자리표축, Ox를 ***x*축**, Oy를 ***y*축**, Oz를 ***z*축**, 평면 Oxy, Oxz, Oyz 를 자리표평면이라고 부른다.



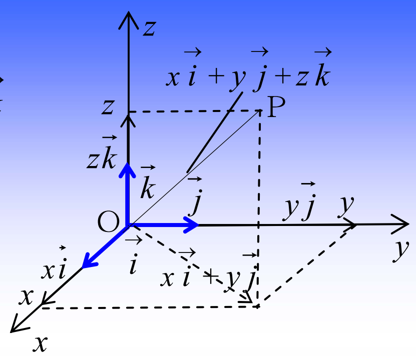
오른손자리표계

그림 1-21

직각자리표계가 도입된 공간에서 임의의 령 아닌 벡토르 $\vec{\mathrm{P}}$는 자리표벡토르 $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ 에 의해서

$$\vec{\mathrm{P}}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

로 표시되고 그 표시는 유일하며 이 표시를 해석적표시라고 부른다.



$$\vec{\mathrm{P}}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\ x=\mathrm{P}_{r\,ox}\vec{\mathrm{P}},\quad y=\mathrm{P}_{r\,oy}\vec{\mathrm{P}},\quad z=\mathrm{P}_{r\,oz}\vec{\mathrm{P}}$$

일 때 $x,\ y,\ z$를 $\vec{\mathrm{P}}$의 직각자리표 또는 성분이라고 부르고 이것을

$$\vec{\mathrm{P}}=\{x,\ y,\ z\}$$

와 같이 표시한다. 이때 x를 $\vec{\mathrm{P}}$의 $\boldsymbol{x}$ 자리표 ($\boldsymbol{x}$-성분), y를 $\vec{\mathrm{P}}$의 $\boldsymbol{y}$자리표 ($\boldsymbol{y}$-성분), z를 $\vec{\mathrm{P}}$의 z자리표(z-성분)라고 부른다.

마찬가지로 공간의 임의의 점 M의 위치벡토르 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$의 자리표 $x,\ y,\ z$를 점 M의 직각자리표라고 부르고 이것을 M$(x,\ y,\ z)$와 같이 표시한다. 이때 x를 M의 $\boldsymbol{x}$자리표, y를 M의 $\boldsymbol{y}$자리표, z를 M의 $\boldsymbol{z}$자리표라고 부른다.

그림 1-22와 같이 공간을 자리표평면들에 의해서 8개의 구역으로 나눈다.

그 매개 부분을 **팔분구**라고 부른다. 팔분구의 번호는 그림 1-22와 같이 붙인다.

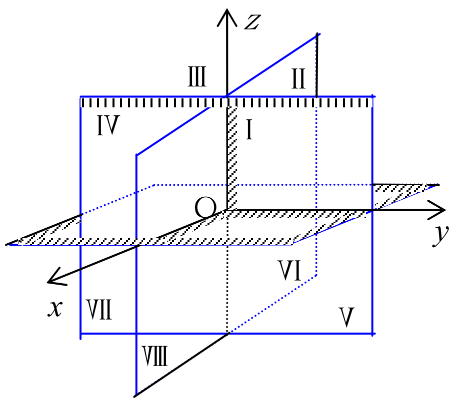


그림 1-22

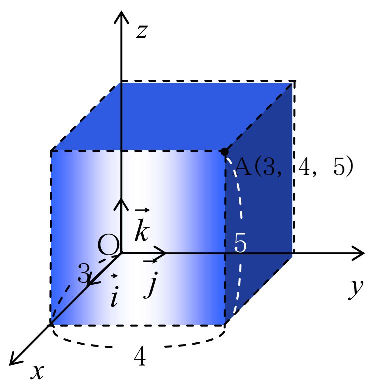


그림 1-23

매 팔분구에서 점의 자리표가 가지는 부호는 다음과 같다.

분구 / 자리표	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

례 점 A(3, 4, 5) 를 찍어라.(그림 1-23)

6. 공간에서 벡토르의 합, 차 및 벡토르와 수와의 적의 자리표

직각자리표계 $\{O:\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ 가 도입된 공간에서 세개의 벡토르

$$\vec{P_1} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\},\ \vec{P_2} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\},\ \vec{P} = \{x,\ y,\ z\}$$

와 수 λ 가 주어졌다고 하자. 이때

$$\vec{P_1} \pm \vec{P_2} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \pm \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$= (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\vec{k}$$

$$\lambda\vec{P} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}$$

이므로 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} = \{x_1 + x_2,\ \ y_1 + y_2,\ \ z_1 + z_2\}$$
$$\vec{P_1} - \vec{P_2} = \{x_1 - x_2,\ \ y_1 - y_2,\ \ z_1 - z_2\}$$
$$\lambda\vec{P} = \{\lambda x,\ \ \lambda y,\ \ \lambda z\}$$

례 $\vec{P_1} = \{3,\ -2\ \ 1\},\ \vec{P_2} = \{2,\ 5,\ 1\}$ 일 때 다음 벡토르들의 자리표를 구하여라.

1) $\vec{P_1} + \vec{P_2}$ 　　2) $\vec{P_1} - \vec{P_2}$

3) $3\vec{P_1}$ 　　4) $2\vec{P_1} + 3\vec{P_2}$

(풀이) 1) $\vec{P_1} + \vec{P_2} = \{3,\ -2,\ 1\} + \{2,\ 5,\ 1\} = \{3+2,\ -2+5,\ 1+1\} = \{5,\ 3,\ 2\}$

2) $\vec{P_1} - \vec{P_2} = \{3,\ -2,\ 1\} - \{2,\ 5,\ 1\} = \{3-2,\ -2-5,\ 1-1\} = \{1,\ -7,\ 0\}$

3) $3\overrightarrow{P_1} = 3\{3,\ -2,\ 1\} = \{9,\ -6,\ 3\}$

4) $2\overrightarrow{P_1} + 3\overrightarrow{P_2} = 2\{3, -2, 1\} + 3\{2,\ 5, 1\}$

$= \{6, -4,\ 2\} + \{6,\ 15,\ 3\} = \{12,\ 11,\ 5\}$

문 제

1. 직각자리표계가 도입된 공간에 다음 점들을 찍어라.

1) A(2, 2, 2)　　2) B(-3, -3, -3)

3) C(3, -2, -4)　　4) D(0, 0, 5)

2. 다음 점들은 어느 분구의 점인가?

1) A(4, -3, 2)　　2) B(-1, -4, 3)

3) C(3, -2, -1)　　4) D(4, 2, 0)

3. $\overrightarrow{P_1} = \{2,\ -3,\ 5\}$, $\overrightarrow{P_2} = \{4,\ 7,\ 3\}$일 때 다음 벡토르의 자리표를 구하여라.

1) $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}$　　2) $\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}$

3) $-3\overrightarrow{P_2}$　　4) $5\overrightarrow{P_1} - 6\overrightarrow{P_2}$

4. 두 점 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$일 때 벡토르 $\overrightarrow{M_1M_2}$의 자리표를 구하여라.

5. 다음 벡토르들을 구하여라. (그림 1-24)

1) $\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A}$

2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CD}$

3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1C_1} - \overrightarrow{DC}$

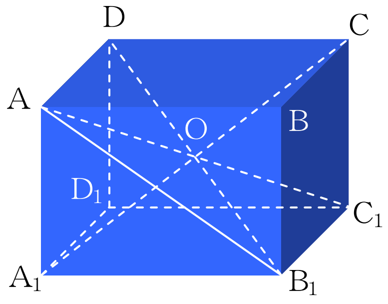


그림 1-24

6. 4면체 ABCD가 주어졌다. 다음것을 구하여라.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$

6. 벡토르의 스칼라적

1) 스칼라적의 정의와 성질

어떤 물체가 힘 F를 받으면서 직선 L을 따라 A에서 B까지 움직였다고 하자.

이때 힘 F가 한 일 P는 다음과 같다.

$$P=|F|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

$$\theta=F^{\wedge}L$$

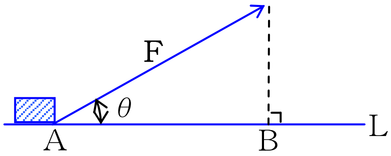


그림 1-25

스칼라적의 정의

두 벡토르 $\overrightarrow{P_1}$과 $\overrightarrow{P_2}$의 길이들과 그것들사이의 각의 코시누스와의 적을 두 벡토르 $\overrightarrow{P_1}$과 $\overrightarrow{P_2}$의 스칼라적이라고 부르고 이것을

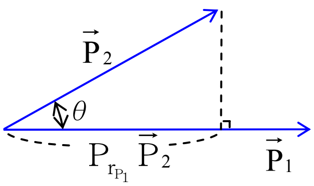
$$\overrightarrow{P_1}\cdot\overrightarrow{P_2} \quad 또는 \quad \left(\overrightarrow{P_1},\ \overrightarrow{P_2}\right)$$

와 같이 표시한다. 즉

$$\overrightarrow{P_1}\cdot\overrightarrow{P_2}=\left|\overrightarrow{P_1}\right|\left|\overrightarrow{P_2}\right|\cos\theta,\quad \theta=\overrightarrow{P_1}^{\wedge}\overrightarrow{P_2}$$

그림 1-26에서 알수 있는것처럼 스칼라적과 사영의 대수값사이에는 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\overrightarrow{P_1}\cdot\overrightarrow{P_2}=\left|\overrightarrow{P_1}\right|\cdot P_{r_{P_1}}\overrightarrow{P_2}=\left|\overrightarrow{P_2}\right|\cdot P_{r_{P_2}}\overrightarrow{P_1}$$



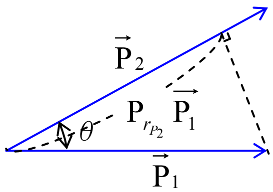


그림 1-26

스칼라적의 성질

1° $\vec{P}\cdot\vec{Q}=\vec{Q}\cdot\vec{P}$ (바꿈법칙)

2° $(\vec{P}+\vec{Q})\cdot\vec{R}=\vec{P}\cdot\vec{R}+\vec{Q}\cdot\vec{R}$ (분배법칙)

3° $(\lambda\vec{P})\cdot\vec{Q}=\lambda(\vec{P}\cdot\vec{Q}),\ \lambda\in R$

4° $\vec{P}\cdot\vec{P}=|\vec{P}|^2\geq 0,\ \vec{P}\cdot\vec{P}=0 \Leftrightarrow \vec{P}=\vec{0}$

(증명) 1° 은 정의로부터 곧 나온다.

2° $\left(\vec{P}+\vec{Q}\right)\cdot\vec{R}=\left|\vec{R}\right|\cdot P_{r_R}\vec{Q}=\left|\vec{R}\right|\cdot\left(P_{r_R}\vec{P}+P_{r_R}\vec{Q}\right)=\vec{P}\cdot\vec{R}+\vec{Q}\cdot\vec{R}$

3° $\left(\lambda\vec{P}\right)\cdot\vec{Q}=P_{r_Q}\left(\lambda\vec{P}\right)\cdot\left|\vec{Q}\right|=\lambda\cdot P_{r_Q}\vec{P}\cdot\left|\vec{Q}\right|=\lambda\left(\vec{P}\cdot\vec{Q}\right)$

4° 도 정의로부터 나온다.

스칼라적의 정의로부터 다음 사실이 성립한다.

$$\vec{P}\perp\vec{Q}\ \Leftrightarrow\ \vec{P}\cdot\vec{Q}=0$$

례 1 임의의 3각형 ABC에서 BC=a, AC=b, AB=c일 때

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

이라는것을 증명하여라.

(풀이) △ABC에서 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

그런데 스칼라적의 성질을 쓰면

$$(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}+(-1)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC})+(-1)(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})+(-1)(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB})$$
$$=(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB})-2(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$$

그런데

$$(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BC})=BC^2=a^2,\quad(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC})=AC^2=b^2$$
$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB})=AB^2=c^2$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=bc\cos A$$

따라서

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

2) 스칼라적의 해석적표시

직각자리표계가 도입된 공간에서 두 벡토르 $\vec{P}_1=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$, $\vec{P}_2=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ 의 스칼라적의 해석적표시를 구하자.

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$
$$=x_1x_2\,\vec{i}\cdot\vec{i}+x_1y_2\,\vec{i}\cdot\vec{j}+x_1z_2\,\vec{i}\cdot\vec{k}+y_1x_2\,\vec{j}\cdot\vec{i}+y_1y_2\,\vec{j}\cdot\vec{j}$$
$$+y_1z_2\,\vec{j}\cdot\vec{k}+z_1x_2\,\vec{k}\cdot\vec{i}+z_1y_2\,\vec{k}\cdot\vec{j}+z_1z_2\,\vec{k}\cdot\vec{k}$$

그런데 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{i}^{\,2}$ 으로 표시하면

$$\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

이므로

$$\vec{\mathrm{P}}_1\cdot\vec{\mathrm{P}}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

문 제

1. 벡토르 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 스칼라적을 구하여라.

   1) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ \vec{a}\wedge\vec{b}=\frac{\pi}{3}$

   2) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=6,\ \vec{a},\ \vec{b}$ 의 방향이 같다.

   3) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ \vec{a},\ \vec{b}$ 의 방향이 반대이다.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 를 구하여라.

   1) $\vec{a}=\{3,\ 4\},\ \vec{b}=\{-2,\ 1\}$

   2) $\vec{a}=\{5,\ 2\},\ \vec{b}=\{-3,\ -6\}$

   3) $\vec{a}=\{4,\ 5,\ 6\},\ \vec{b}=\{-2,\ -3,\ 2\}$

3. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ \vec{a}\wedge\vec{b}=\frac{2}{3}\pi$ 일 때 다음의 값을 구하여라.

   1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

   2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

   3) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

3) 스칼라적의 응용

벡토르의 길이

$\vec{P}=\{x,\ y,\ z\}$ 와 $\vec{Q}=\{x, y\}$ 에서

$$|\vec{P}|^2 = x^2+y^2+z^2 \quad , \quad |\vec{Q}|^2 = x^2+y^2$$

이므로 벡토르의 길이는 다음과 같다.

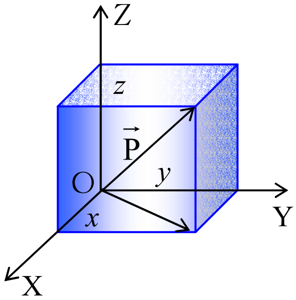


그림 1-27

공간 $|\vec{P}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

평면 $|\vec{Q}| = \sqrt{x^2+y^2}$

두 벡토르사이의 각

두 벡토르 $\vec{P_1}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$, $\vec{P_2}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$사이의 각 θ를 구하기로 하자.

$$\vec{P_1}\cdot\vec{P_2} = |\vec{P_1}|\cdot|\vec{P_2}|\cos\theta, \qquad \theta = \vec{P_1}\wedge\vec{P_2}$$

이므로

$$\cos\theta = \frac{\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2}{|\vec{P}_1||\vec{P}_2|}$$

따라서 공간과 평면에서 두 벡토르사이의 각은 다음과 같다.

공간: $\cos\theta = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

평면: $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

례 2 공간에서 두 점 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리를 구하여라.

(풀이) $\rho(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = |\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}|$

그런데

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \{x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1\}$$

이므로 구하려는 거리 ρ는 다음과 같다.

$$\rho(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(주의) 평면에서 두 점 A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\rho(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

례 3 두 벡토르 $\overrightarrow{\mathrm{P}_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{\mathrm{P}_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$의 수직조건의 해석적표시를 구하여라.

(풀이) $\overrightarrow{\mathrm{P}_1} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{P}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_2} = 0$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{P}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_2} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

평면에서 $\overrightarrow{\mathrm{Q}_1} = \{x_1, y_1\}$, $\overrightarrow{\mathrm{Q}_2} = \{x_2, y_2\}$의 수직조건은 분명히

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_1} \perp \overrightarrow{\mathrm{Q}_2} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

(주의) 두 벡토르 $\overrightarrow{\mathrm{P}_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{\mathrm{P}_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$가 공선이기 위해서는

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ 일것이 필요하고 충분하다.

문 제

1. 다음 벡토르의 길이를 구하여라.

   1) $\vec{a} = \{3, 4, 5\}$ 2) $\vec{b} = \{0, -2\}$ 3) $\vec{c} = \{7, -2, 5\}$

2. 두 점사이의 거리를 구하여라.

   1) A(2, -3), B(6, 0) 2) A(-4, -5), B(3, 5) 3) A(2, 1, 7), B(3, 4, 1)

3. 두 벡토르사이각을 구하여라.

   1) $\vec{a} = \{4, 3\}$, $\vec{b} = \{1, 7\}$

   2) $\vec{a} = \{2, 5\}$, $\vec{b} = \{0, -3\}$

   3) $\vec{a} = \{2, -6, -3\}$, $\vec{b} = \{3, 0, -4\}$

4. 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 공선인것을 찾아라.

1) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}$　　　2) $\vec{a}=4\vec{i}-\frac{2}{5}\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\frac{1}{10}\vec{j}$

3) $\vec{a}=\{-2,\ 4\}$, $\vec{b}=\{4,\ -8\}$　　　4) $\vec{a}=\{2,\ -1,\ 3\}$, $\vec{b}=\{-4,\ 2,\ -6\}$

5. 세 벡토르 $\vec{a}=\{3,\ 2,\ 1\}$, $\vec{b}=\{2,\ -3,\ 0\}$, $\vec{c}=\{-4,\ 6,\ 0\}$ 이 주어졌다. $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\ /\!/\ \vec{c}$ 임을 밝혀라.

6. 세 점 A(5, -5, 4), B(-1, -2, 10), C(10, -3, 8)을 정점으로 하는 3각형이 직3각형이라는것을 증명하여라.

련 습 문 제

1. 4각형 ABCD의 변 AB, CD의 가운데점을 E, F로 표시하였을 때

$$\overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$$

이라는것을 증명하여라.

2. $\vec{a}=\{3,\ 5\}$, $\vec{b}=\{1,\ -2\}$, $\vec{c}=\{-2,\ 3\}$일 때 다음 벡토르들의 성분을 구하여라.

1) $\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{c}$　　　2) $5(\vec{a}-2\vec{b})+6\vec{c}$

3. 평행4변형 ABCD의 세 정점 A(-2, 1), B(1, 3), C(4, 0)가 주어졌다. 넷째 정점의 자리표를 구하여라.

4. $\vec{a}=\{4,\ -6\}$, $\vec{b}=\{-2,\ 1\}$일 때 다음것을 구하여라.

1) $\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{5}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}$

2) $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b})+(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})$

5. $\vec{a}\wedge\vec{b}$ 를 구하여라.

1) $\vec{a}=\{0,\ 4\}$, $\vec{b}=\{1,\ 3\}$　　　2) $\vec{a}=\{-1,\ 4\}$, $\vec{b}=\{4,\ -4\}$

3) $\vec{a}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\vec{b}=\{0,\ -1,\ 2\}$

6. 다음 벡토르의 스칼라적을 구하여라.

1) $\vec{a}=\{0,\ 1\}$, $\vec{b}=\{-2,\ 3\}$　　　2) $\vec{a}=\{-2,\ 4,\ 3\}$, $\vec{b}=\{5,\ 1,\ 2\}$

7. 다음 같기식이 옳은가를 따져보아라. (여기서 $a=|\vec{a}|$ 이고 $b=|\vec{b}|$ 이다.)

1) $(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}=a^3$　　　2) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}=a^2\cdot\vec{b}$　　　3) $(\vec{b}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}=b^2\vec{a}$

4) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=a^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$　　　5) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$

6) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2-b^2$　　　7) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=a^2b^2$

8. 다음의 벡토르 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 평행인가를 따져보아라.

1) $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{b}=-\frac{3}{2}\vec{i}+\vec{j}$ 　　　2) $\vec{a}=\{1, -1, 3\}$, $\vec{b}=\{-2, 2, -6\}$

9. $\vec{a}=\{3, -1, 2\}, \vec{b}=\{4, 2, 1\}$일 때 다음 벡토르의 길이를 구하여라.

1) $2\vec{a}+3\vec{b}$ 　　　2) $4\vec{a}-\vec{b}$

10. 세 점 A(2, 2), B(3, 2), C(2, α)가 한 직선에 놓이기 위해서는 α가 어떤 값을 취해야 하는가?

11. 평면에 임의로 놓여있는 네 점 A, B, C, D에 대하여

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$$

이 성립한다는것을 증명하여라.

12. 선분 AB의 한 끝점은 A(2, 3)이고 AB의 가운데점은 M(1, -2)이다. C(0, 4)일 때 이 3각형의 무게중심의 자리표를 구하여라.

13. A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)인 선분 AB를 주어진 비 λ로 나누는 점 M(x, y)의 자리표는

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

이다. 증명하여라.

14. 벡토르 $\vec{a}=\{-3, 2, 6\}$ 이 자리표축들과 이루는 각을 구하여라.

15. 정점이 A(0, 5, 0), B(1, 1, 1), C(-1, 3, 2)인 3각형의 변들의 길이와 아낙각들을 구하여라.

제2절. 평면에서 직선의 방정식

1. 직선의 벡토르방정식과 보조변수방정식

직선에 놓이거나 직선에 평행인 벡토르가 주어졌을 때 그것을 직선의 **방향벡토르**라고 부른다.

이제 직선 L과 그의 방향벡토르 $\vec{a}$가 주어졌다고 하자.(그림 1-28)

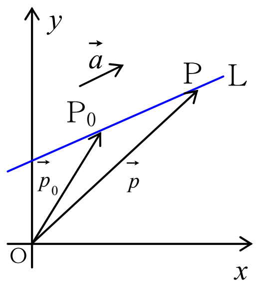


그림 1-28

직선 L에서 어떤 점 P_0을 잡으면 P_0에는 위치벡토르 $\overrightarrow{OP_0}=\vec{P_0}$ 이 대응한다.

다음으로 직선 L에서 임의의 점 P를 잡으면 P에는 위치벡토르 $\overrightarrow{OP}=\vec{P}$ 가 대응한다. 이때

$$\overrightarrow{P_0P}=t\vec{a},\ t\in R$$

그런데

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}=\vec{\mathrm{P}}-\vec{\mathrm{P}}_0$$

따라서

$$\vec{\mathrm{P}}=\vec{\mathrm{P}}_0+t\vec{a},\ t\in\mathrm{R}$$

점 P가 직선 L의 점이 아니면 $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}$는 $\vec{a}$와 평행이 아니다. 그러므로 이런 점 P에 대해서는 우의 식이 성립하지 않는다.

우의 방정식을 직선 L의 **벡토르방정식**이라고 부른다.

이제 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\{x,\ y\}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\{x_0,\ y_0\}$, $\vec{a}=\{a_x,\ a_y\}$이라고 하면 직선의 벡토르방정식은

$$x\vec{i}+y\vec{j}=(x_0\vec{i}+y_0\vec{j})+t(a_x\vec{i}+a_y\vec{j})$$
$$x\vec{i}+y\vec{j}=(x_0+a_xt)\vec{i}+(y_0+a_yt)\vec{j}$$

모양으로 표시된다. 따라서

$$\begin{cases}x=x_0+a_xt\\ y=y_0+a_yt\end{cases}$$

이것을 직선 L의 **보조변수방정식**이라고 부르며 t를 **보조변수**라고 부른다.

례 1 점 $\mathrm{P_0}(5,\ 7)$을 지나고 방향벡토르가 $\vec{a}=\{2,3\}$인 직선의 벡토르방정식과 보조변수방정식을 구하여라.

(풀이) 주어진 직선의 벡토르방정식은 직선의 임의의 점 P의 자리표를 $(x,\ y)$라고 할 때

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}+t\vec{a}$$
$$\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)=\left(5\vec{i}+7\vec{j}\right)+t\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)$$

다음으로 주어진 직선의 보조변수방정식은 우의 방정식으로부터

$$\begin{cases}x=5+2t\\ y=7+3t\end{cases}$$

보조변수방정식에서 보조변수 t를 없애면

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}$$

이것을 **방향벡토르에 의한 직선의 방정식**이라고 부른다.

례 2 점 $\mathrm{M_0}(-1,\ 2)$ 를 지나고 방향벡토르가 $3\vec{i}+2\vec{j}$ 인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) $a_x=3$, $a_y=2$, $x_0=-1$, $y_0=2$ 이므로 방향벡토르에 의한 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}$$

례 3 점 P(0, b)를 지나고 방향벡토르가 $\vec{a}=\vec{i}+k\vec{j}$ 인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 방향벡토르에 의한 직선 L의 방정식은

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-b}{k}$$

이것을 고쳐쓰면

$$y=kx+b$$

이것은 이미 알고있는 방향결수가 k인 직선의 방정식이다.

해보기 방향결수 k를 직선과 x축이 이루는 각 θ로 표시해보아라.

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{k}{1}=k$ 이므로

$$k=\tan\theta$$

즉 방향결수 k는 직선 L이 x축과 이루는 각의 탕겐스와 같다.

두 점 M_1 (x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식을 구하자.
이 직선은 점 M_1(x_1, y_1)을 지나고 방향벡토르가 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 인 직선으로 볼수 있다.

그런데 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$ 이므로 고찰하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

이것은 **두 점을 지나는 직선의 방정식**이다.

례 4 두 점 M_1(-2, 3), M_2(1, 5)를 지나는 직선의 방정식을 구하여라. (그림 1-29)

(풀이) $\frac{x-(-2)}{1-(-2)}=\frac{y-3}{5-3}$

이므로

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}$$

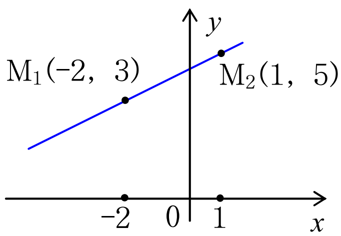


그림 1-29

문 제

1. 정점이 C(0, 0), A(a, 0), B(0, b)인 △ABC의 세 변의 벡토르방정식과 보조변수방정식(변이 놓이는 직선)을 구하여라.
2. 점 M_0(−3, 2)을 지나며 방향벡토르가 $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}$ 인 직선의 방정식을 구하여라.
3. 점 A(1, 2)를 지나며 x축과 $60°$ 를 이루는 직선의 방정식을 구하여라.
4. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.
   1) 원점 O와 점 (3, −2)를 지나는 직선
   2) 두 점 A(5, 2), B(−3, 4)를 지나는 직선

2. 직선의 일반방정식

점 $M_0(x_0,\ y_0)$을 지나고 벡토르 $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}$ 에 수직인 직선 L의 방정식을 구하자.

직선에서 아무런 점 M(x, y)을 잡아도 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$ 이므로

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

여기서 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ \ y-y_0\}$, $\vec{n}=\{a,\ b\}$이다. 즉

$$L\ni M(x,\ y)\ \Leftrightarrow\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

따라서 직선 L의 방정식은

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

주어진 직선에 수직인 벡토르를 이 직선의 **법선벡토르**라고 부르며 이 방정식을 **법선벡토르에 의한 직선의 방정식**이라고 부른다.

례 1 점(1, 2) 를 지나고 벡토르 $3\vec{i}+2\vec{j}$ 에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) $M_0(1,\ 2)$, $\vec{n}=\{3, 2\}$ 이므로 법선벡토르에 의한 직선의 방정식을 구하는 공식에 의하여

$$3(x-1)+2(y-2)=0$$

따라서 직선의 방정식은

$$3x+2y-7=0$$

정리. 평면에서 직선의 방정식은 1차방정식 $ax+by+c=0$ 으로 표시되고 그 거꿀도 성립한다.

(증명) 직선의 방정식이 1차방정식이라는것은 이미 앞에서 보았다.

거꾸로 x, y에 관한 1차방정식 $ax+by+c=0$ 은 다 직선의 방정식으로 된다는것을 밝히자.

ㄱ) $a\neq0$인 경우

$$a\left(x+\frac{c}{a}\right)+b(y-0)=0$$

따라서 이것은 점 $\left(-\frac{c}{a},\ 0\right)$ 을 지나고 $\vec{n}=\{a,\ b\}$ 를 법선벡토르로 가지는 직선의 방정식이다.

ㄴ) a=0인 경우

이때 $b\neq0$이다. 왜냐하면 b=0이면 1차방정식이 아니기때문이다.

이때 방정식은

$$0(x-0)+b\left(y+\frac{c}{b}\right)=0$$

으로 쓸수 있다. 이것은 점 $\left(0,\ \frac{-c}{b}\right)$를 지나고 $\vec{n}=\{0,\ b\}$를 법선벡토르로 가지는 직선의 방정식이다.

어느 경우에나 x, y에 관한 1차방정식 $ax+by+c=0$ 에서 $\vec{n}=\{a,\ b\}$는 이 직선의 법선벡토르이다. 방정식 $ax+by+c=0$ 을 직선의 **일반방정식**이라고도 부른다.

례 2 직선의 방정식 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}$ 을 일반방정식으로 고치고 이 직선의 법선벡토르를 구하여라.

(풀이) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}$ 을 $ax+by+c=0$ 모양으로 고치면 $5(x-3)=2(y+1)$

따라서 이 직선의 일반방정식은

$$5x-2y-17=0$$

이고 법선벡토르는

$$\vec{n}=\{5,\ -2\}$$

탐 구

자리표원점 O에서 직선 L까지의 거리 P와 직선 L과 x축이 이루는 각이 주어지면 직선은 유일하게 결정된다. 직선 L의 방정식을 구하여라.

문 제

1. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

1) 자리표원점을 지나며 벡토르 $\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ 에 수직인 직선과 평행인 직선

2) 점 $M_0(6,\ -1)$을 지나며 법선벡토르가 $\vec{n} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ 인 직선과 방향벡토르가 $\vec{n} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ 인 직선

2. 다음과 같은 직선의 방정식을 일반방정식으로 고쳐라. 그리고 방향벡토르와 법선벡토르를 구하여라.

1) $y = \frac{3}{5}x - 5$　　2) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+4}{7}$　　3) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases},\quad t \in R$

3. 다음 방정식이 표시하는 직선을 그려라.

1) $x - y + 3 = 0$　　2) $2x + 5y - 2 = 0$

3) $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2}$　　4) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases},\quad t \in R$

4. 점 $M_0(1,\ -3)$에서 직선 $3x - 4y - 1 = 0$ 까지의 거리를 구하여라.

3. 두 직선의 위치관계

두 직선

$$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0,\quad L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

이 주어졌다고 하자.

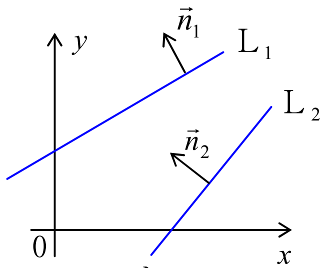


그림 1-30

직선 L_1의 법선벡토르는

$$\vec{n_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$$

직선 L_2의 법선벡토르는

$$\vec{n_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$$

이때 직선 L_1과 L_2의 위치관계를 보자.

알아보기 1) 기하에서 평행각, 수직각의 성질을 말해보아라.

2) 두 직선

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

이 평행, 평행이 아닌 경우 법선벡토르들은 어떤 관계에 있는가?

두 직선의 평행조건

$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$ 이므로 $L_1 /\!/ L_2$ 대신 $\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$ 을 보면 된다.

$$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$L_1 /\!/ L_2$ 인 경우는 L_1 과 L_2 가 일치하는 경우도 포함하는것으로 본다.

두 직선의 사귐조건

$L_1 \not\!/\!\!/ L_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \not\!/\!\!/ \vec{n}_2$ 이므로

$$L_1 \not\!/\!\!/ L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

($a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ 인 경우)

두 직선 L_1, L_2 에서

1) $L_1 /\!/ L_2$ (또는 일치) $\Leftrightarrow$ 두 직선의 일반방정식에서 x, y 의 결수가 비례한다.

2) $L_1 \not\!/\!\!/ L_2$ $\Leftrightarrow$ 두 직선의 일반방정식에서 x, y 의 결수들이 비례하지 않는다.

례 1 두 직선 L_1, L_2 가 다음과 같이 주어졌을 때 그 직선들의 위치관계를 말하여라.

1) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x=y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$

(풀이) 1) $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$ 이므로 L_1 과 L_2 는 사귄다. 련립방정식을 풀면

$x=1$, $y=1$

그러므로 L_1 과 L_2 의 사귐점은 $M_0(1,\ 1)$ 이다. (그림 1-31 ㄱ))

2) $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로 L_1과 L_2는 평행이다. 즉 $L_1 \parallel L_2$

그런데

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=5 \end{cases} \text{ 은 } \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=\frac{5}{2} \end{cases} \text{ 이므로}$$

L_1과 L_2는 일치하지 않으면서 $L_1 \parallel L_2$이다. (그림 1-31 ㄴ))

3) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$이므로 $L_1 \parallel L_2$이다.

그런데 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$ 은 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$ 이므로

즉 L_1, L_2는 일치한다. (그림 1-31 ㄷ))

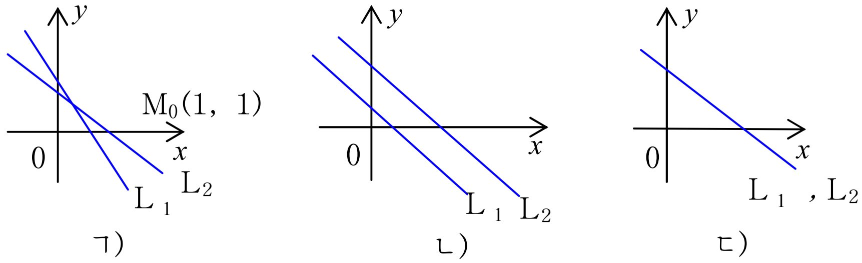


그림 1-31

두 직선이 이루는 각, 두 직선의 수직조건

다음과 같은 두 직선

$$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0, \qquad L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$

이 주어졌다고 하자.

직선 L_1, L_2의 법선벡토르는

$$\vec{n}_1=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$$

$$\vec{n}_2=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$$

이므로

$$\vec{n}_1 \perp L_1, \quad \vec{n}_2 \perp L_2$$

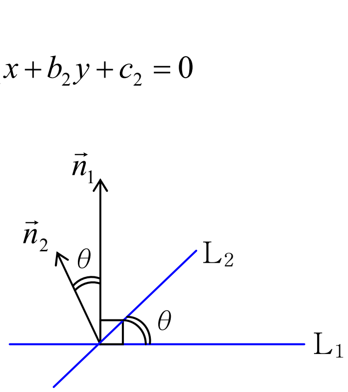


그림1-32

그러므로 L_1과 L_2가 이루는 각 θ는 $\widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2}$와 같다. 즉

$$\widehat{\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2}}=\theta$$

따라서 두 직선사이의 각은

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

그리고 $L_1 \perp L_2 \Rightarrow \cos\theta = 0$ 이므로 두 직선의 수직조건은

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

해보기 두 직선의 평행조건, 수직조건을 방향결수에 의하여 표시해보아라.

$$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$$

례 2 점 $M_0(5, -2)$을 지나고 직선 $2x + 3y + 5 = 0$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 구하려는 직선은 점 $M_0(5, -2)$를 지나고 방향벡토르가 $2\vec{i} + 3\vec{j}$ 인 직선이다. 그러므로 구하려는 직선은

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{3}$$

일반방정식으로 고치면

$$3x - 2y - 19 = 0$$

문 제

1. 직선의 일반방정식 $Ax + By + C = 0$ 에서 A, B, C 가운데 어느것이 령으로 되는가에 따르는 직선의 위치를 설명하여라.
2. 다음의 직선들에서 평행 또는 수직인 직선들을 찾아보아라.
   1) $2x + 3y - 5 = 0$　　2) $3x - 2y + 6 = 0$
   3) $-x + \frac{2}{3}y - 4 = 0$　　4) $6x - 4y - 5 = 0$
3. 두 직선사이각을 구하여라.

1) $2x-3y+5=0$, $x+y-4=0$ 2) $x+2y-3=0$, $-2x+2y+5=0$

4. 점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$을 지나며 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.
5. 점 M(3, -2)에서 직선 $x-y+6=0$까지의 거리를 구하여라.

련 습 문 제

1. 두 직선 $5y-2x-1=0$, $y+4x-3=0$의 사귐점과 다른 두 직선

$$10y+x+21=0,\quad 8y-5x+1=0$$

의 사귐점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.
2. 다음의 두 직선 $x+2y-8=0$, $4x-5y=10$의 사귐점을 지나고 x축과 $45°$인 각을 이루는 직선의 방정식을 구하여라.
3. 다음과 같은 직선 L의 보조변수방정식, 방향벡토르에 의한 방정식, 법선벡토르에 의한 방정식을 구하여라.
   1) 점 $\mathrm{M}(2,\ 0)$을 지나며 법선벡토르가 $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$인 직선
   2) 점 $\mathrm{M}(0,\ -3)$을 지나며 법선벡토르가 $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$인 직선
   3) 자리표원점을 지나며 방향곁수가 k=2인 직선
   4) 두 점 $\mathrm{A}(5,-3)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$ 을 지나는 직선
4. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

로 된다는것을 증명하여라. (그림 1-33)

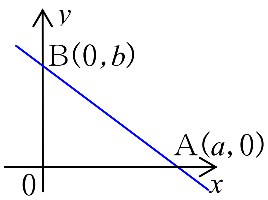


그림 1-33

5. 두 직선

$$x-my+2=0,\quad mx-4y-n=0$$

에서 m, n이 어떤 값을 가질 때 다음과 같이 되겠는가?
   1) 공통점이 하나 2) 공통점이 없다. 3) 일치한다.
6. 점 $\mathrm{M}(3,\ -2)$를 지나며 직선 $x-y+5=0$에 평행인 직선 및 수직인 직선의 방정식을 구하여라.
7. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.
   1) 점 $\mathrm{M}(0,\ 3)$을 지나며 방향벡토르가 $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ 인 직선
   2) 점 $\mathrm{M}(2,\ -1)$을 지나며 방향곁수가 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 직선
   3) 점 M(-3, 1)을 지나며 x축의 정의 방향과 $45°$ 를 이루는 직선
8. 평행4변형의 린접한 두 변의 방정식이 $x-y-1=0$, $x-2y=0$이고 대각선의 사귐점이 M(3, -1)이다. 이 평행4변형의 다른 두 변의 방정식을 구하여라.
9. 정점이 $\mathrm{A}(3,1)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$, $\mathrm{C}(2,\ 0)$인 3각형의 무게중심을 지나며 끝점이 $\mathrm{M}(0,\ 0)$, $\mathrm{N}(6,\ 4)$인 선분 MN을 비 λ로 나누는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

10. 평행4변형의 두 변의 방정식 $x-3y=0, 2x+5y+6=0$과 한 정점 $(4, -1)$을 알고 다른 두 변의 방정식을 구하여라.

11. 점 $M_0(1, 3)$으로부터 직선 $x+y-3=0$까지의 거리를 구하여라.

12. 직선 L이 2, 3, 4사분구를 지난다. 직선 L이 x축과 이루는 각 α, 방향결수는 k이다. 다음 식에서 옳은것을 찾아라.

1) $k\sin\alpha>0$ 2) $k\cos\alpha>0$

3) $k\sin\alpha\le 0$ 4) $k\cos\alpha\le 0$

13. 직선 $y=kx+3k-2$와 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$의 사귐점이 1사분구에 있을 때 k가 취할수 있는 값범위를 구하여라.

제 3 절. 원뿔곡선의 방정식

원, 타원, 쌍곡선, 포물선은 원뿔면을 자를 때 생긴다.

그림 1-34에서와 같이 원뿔의 옆면을 축에 수직인 평면으로 자르면원 (ㄱ)이 생기고 모든 모선과 사귀면서 축에 경사지게 자르면 타원(ㄴ)이 생기고 축에 평행인 평면으로 자르면 쌍곡선 (ㄷ)이 생긴다.

또한 한 모선에 평행인 평면으로 자르면 포물선 (ㄹ)이 생긴다.

그러므로 원, 타원, 쌍곡선, 포물선을 통털어서 **원뿔곡선**이라고도 부른다.

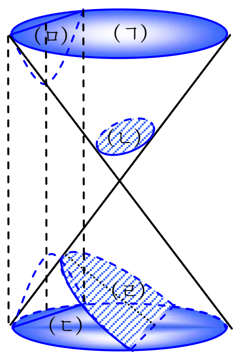


그림 1-34

1. 원의 방정식

주어진 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임을 **원**(또는 **원둘레**)이라고 부르며 주어진 점을 원의 **중심**, 주어진 거리를 원의 **반경**이라고 부른다.

자리표원점 O를 중심으로 하고 반경이 r인 원의 방정식을 구하자.

원의 임의의 점 $M(x, y)$를 잡아도(그림 1-35)

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|=r$$

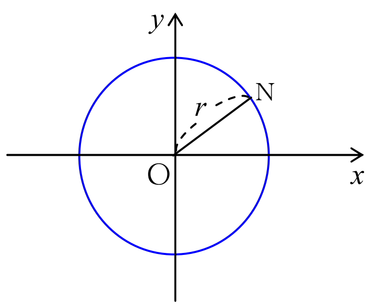


그림 1-35

이고 $\overrightarrow{OM}=\{x, y\}$, $\sqrt{x^2+y^2}=r$

따라서

$$x^2+y^2=r^2$$

중심이 자리표원점에 있고 반경이 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

꼭 마찬가지로 하여 중심이 $(a,\ b)$에 있고 반경이 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

이 방정식을 원의 **표준방정식**이라고 부른다.

일반적으로 원의 방정식은

$$x^2+y^2+2\mathrm{A}x+2\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$$

으로 표시되는데 x^2, y^2의 결수가 같고 령 아니며 xy마디가 없는것이 특징이다.

원의 보조변수방정식

중심이 $\mathrm{O}(0,0)$에 있고 반경이 r인 원의 임의의 점 $\mathrm{M}(x,\ y)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$과 x축사이각을 t라고 하면

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases} \quad (0\le t<2\pi)$$

이다. 이 방정식을 t를 보조변수로 하는 원의 **보조변수방정식**이라고 부른다. (그림 1-36)

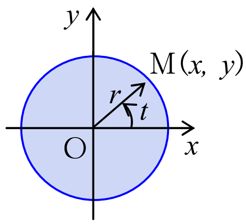


그림1-36

탐 구

$x^2+y^2=r^2$의 점 (x_0,y_0)에서 접선의 방정식이 $xx_0+yy_0=r^2$으로 된다는것을 증명하여라.

문 제

1. 다음의 방정식들에서 원의 중심과 반경을 구하여라.

   1) $(x-a)^2+(y-5)^2=16$

   2) $(x+3)^2+(y+4)^2=11$

   3) $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=2$

2. 다음과 같이 중심과 반경이 주어진 원의 방정식을 구하여라.

   1) $C(-1,-5),\ r=\sqrt{7}$ 2) $C(0,\ 4),\ r=\sqrt{17}$ 3) $C(-3,\ 0),\ r=\sqrt{3}$

3. 방정식 $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ 이 주어졌을 때 다음의 점들이 원의 아낙 또는 바깥 또는 원둘레에 놓이는가를 밝혀라.

   1) $A(2,\ 0)$ 2) $B(1,\ 1)$ 3) $C(3,\ 0)$

4. 다음의 조건을 만족시키는 방정식들에서 k의 값을 구하여라.

   1) $x^2+y^2-12x+8y+k=0$ 은 반경이 4인 원이다.

   2) $x^2+y^2+4x-2y+k=0$ 은 원을 표시한다.

   3) $x^2+y^2-6x+k=0$ 은 점을 표시한다.

   4) $x^2+y^2+4x+ky+7=0$ 은 원이다.

5. 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 이 두 자리표축과 서로 접하는 조건은 아래에서 어느것인가?

   1) $a^2+b^2=r^2$ 2) $a=b=r$

   3) $a^2=b^2=r^2$ 4) $|a|=r,\ |b|=r$

2. 타원의 방정식

평면에 정해놓은 두 점 F_1, F 까지의 거리의 합이 일정 $(2a)$ 한 점들의 모임으로 된 도형을 타원이라고 부른다. 이때 F_1, F 를 타원의 초점이라고 부른다.

타원의 방정식을 구하자.

그림 1-37과 같이 선분 F_1F 의 가운데점을 자리표원점 O로 정하고 직선 F_1F 를 x 축, O를 지나며 F_1F 에 수직인 직선을 y 축으로 잡자.

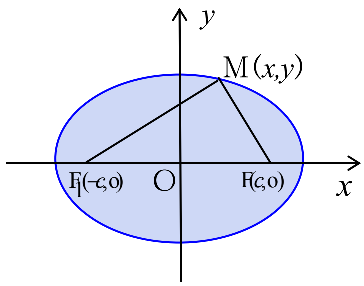


그림 1-37

$F_1F=2c(c<a)$로 놓으면

$$F_1(-c,\ 0),\ F(c,\ 0)$$

타원의 임의의 점을 $M(x,\ y)$라고 하면

$$MF_1+MF=2a$$

이다. 또한

$$\mathrm{MF}_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ \mathrm{MF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

이므로

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

다시 두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

그런데 $a>c>0$ 이므로 $a^2-c^2=b^2(b>0)$ 으로 놓으면

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

두 변을 a^2b^2 으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

따라서 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이것을 타원의 **표준방정식**이라고 부른다.

타원이 x 축과 사귀는 점을 A, A_1, y축과 사귀는 점을 B, B_1이라고 하면

$$A(a,\ 0),\ A_1(-a,\ 0),\ B(0,\ b),\ B_1(0,\ -b)$$

이때 선분 AA_1 을 타원의 **긴축**, 선분 BB_1 을 타원의 **짧은축**이라고 부른다. 그리고 a, b를 각각 타원의 **긴반경**, **짧은반경**이라고 부른다.

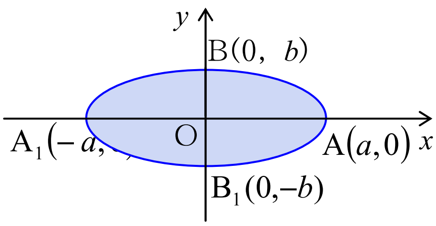


그림 1-38

이제 원의 방정식

$$x^2+y^2=a^2$$

에서 $M_1(x,y)$를 $M\left(x,\ \frac{b}{a}y\right)$으로 넘기자. 이때 $M(X,Y)$라고 하면

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \dfrac{b}{a}y \end{cases}$$

따라서 $X^2 + \left(\dfrac{aY}{b}\right)^2 = a^2$

따라서 $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$

이것은 원을 $MN = \dfrac{b}{a}M_1N$ 되게 압축하면 타원이 된다는것을 보여준다. (그림 1-39)

그림 1-40과 같은 원에서 임의의 점 $M_1(x, y)$를 잡으면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

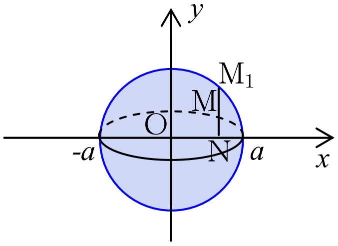


그림 1-39

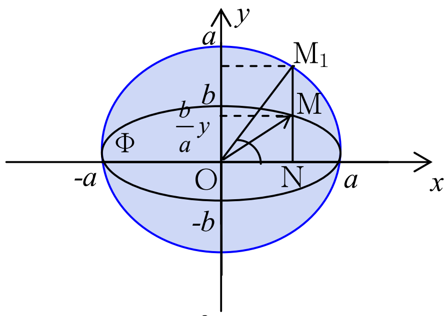


그림 1-40

이제 $X = x,\ Y = \dfrac{b}{a}y$ 되게 압축하면 긴반경이 a, 짧은반경이 b인 타원이 된다.

그리하여 다음과 같은 타원의 방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} X = a\cos t \\ Y = b\sin t \end{cases}$$

이 방정식을 타원의 **보조변수방정식**이라고 부른다.

(주의) 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$은 긴축이 y축에 놓이는 타원을 표시한다. 이 때 이 타원의 초점은 y축에 놓인다.

타원의 기하학적성질

1° 타원은 직선 $x=\pm a$, $y=\pm b$로 둘러싸인 직4각형 안에 놓인다.

사실 타원의 점의 자리표 (x, y)는

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad |x|\le a,\quad |y|\le b$$

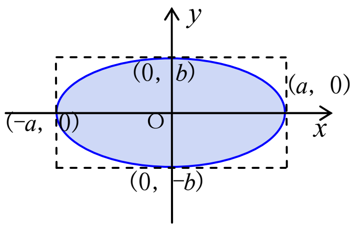


그림 1-41

2° 타원은 x축과 y축 그리고 자리표원점에 관해 대칭이다. 따라서 x축과 y축은 대칭축이며 자리표원점은 대칭중심이다. 타원의 대칭중심을 타원의 **중심**이라고 부른다.

3° **타원의 정점:** 타원과 x축 및 y축과의 사귐점을 타원의 **정점**이라고 부른다.

타원의 정점의 자리표는 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$이다.

4° **타원의 리심률:** 타원에서 $e=\dfrac{c}{a}$를 타원의 **리심률**이라고 부른다.

$a>c>0$이므로 $0<e<1$이다. $e\to 0$이면 타원은 원에 가까와지고 $e\to 1$이면 타원은 직선에 접근한다.

5° **타원의 준선:** 타원에서 L: $x=\pm\dfrac{a}{e}$인 직선을 **준선**이라고 부른다. 타원의 점에서 초점까지 거리와 준선까지 거리의 비는 일정하다.

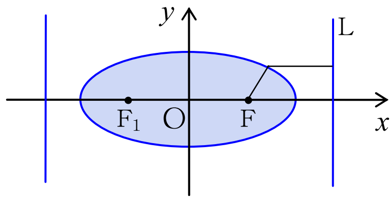


그림 1-42

문 제

1. 다음과 같은 긴반경과 짧은반경이 주어졌을 때 타원의 표준방정식, 보조변수방정식을 구하여라.

 1) $a=4,\ b=2$ 2) $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{3}$

2. 다음과 같은 타원의 방정식에서 보조변수방정식은 표준방정식으로 고치고 표준방정식은 보조변수방정식으로 고쳐라.

 1) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$

 3) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 4) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$

3. 문제 2의 타원의 방정식으로부터 그 타원들의 초점의 자리표를 구하여라.

4. 다음의 방정식을 타원의 표준방정식으로 고치고 긴반경과 짧은반경, 초점의 자리표를 구하여라.

1) $x^2+4y^2=16$ 2) $2x^2+3y^2=5$ 3) $x^2-5=-2y^2$

4) $2y^2=5-\frac{2}{3}x^2$ 5) $25x^2+16y^2=400$

5. 타원

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$$

에 내접하는 직4각형의 두 변은 타원의 초점을 각각 지난다. 이 4각형의 면적을 구하여라.

6. 타원

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

에 바른3각형이 내접한다. 이 3각형의 한 정점이 타원의 긴반경의 오른쪽정점과 일치한다. 3각형의 다른 두 정점의 자리표를 구하여라.

7. 타원의 짧은축의 길이는 2, 긴축의 길이는 짧은축의 2배이다. 타원중심에서 그 준선까지의 거리를 구하여라.

8. 타원을 그리는 방법을 설명하고 그 근거를 밝혀라.

3. 쌍곡선의 방정식

평면에서 정해놓은 두 점 F_1, F까지의 거리의 차가 일정$(2a)$한 점들의 모임으로 된 도형을 **쌍곡선**이라고 부른다. 여기서 점 F_1, F를 쌍곡선의 **초점**이라고 부른다.

쌍곡선의 방정식을 구하자.

그러기 위하여 F_1F의 가운데점을 자리표원점 O로 정하고 직선 F_1F를 x축, O를 지나며 F_1F에 수직인 직선을 y축으로 잡자.

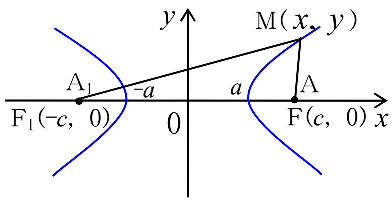


그림 1-44

$F_1F=2c(c>0)$로 놓으면

$$F_1(-c,\ 0),\ F(c,\ 0)$$

쌍곡선의 임의의 점을 $M(x,y)$라고 하면

$$|MF_1-MF|=2a$$

이므로

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

이 방정식에서 두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

다시 두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

그런데 $c>a>0$ 이므로

$$c^2-a^2>0$$

따라서 $c^2-a^2=b^2\left(b>0\right)$ 으로 놓으면

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

두 변을 a^2b^2 으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

이것을 쌍곡선의 **표준방정식**이라고 부른다.

이때 선분 $\mathrm{AA_1}$ 을 **실축**, 선분 OA 또는 그 길이 a 를 **실반경**이라고 부른다.

두 점 $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{B_1}(0,\ -b)$ 를 잡았을 때 선분 $\mathrm{BB_1}$ 을 **허축**, 선분 OB 또는 그 길이 b 를 **허반경**이라고 부른다.

탐구

쌍곡선은 포소리를 듣고 포의 위치를 확정하는데 리용할수 있다. 3개의 지점 A, B, C에서 포소리를 들었다. 포소리를 A에서 들은것은 B에서 들은것보다 10초 늦었고 C에서 들은것보다는 6초 늦었다고 한다. 지도에서 포의 위치를 어떻게 구할수 있는가?(소리의 속도는 340㎧)

쌍곡선의 기하학적성질

1° 쌍곡선은 $x \ge a$, $x \le -a$ 인 구역에 놓이는 무한곡선이다.

사실 쌍곡선의 자리표 (x, y)는 $\frac{x^2}{a^2} \ge 1$ 이므로 $|x| \ge a$ 이다.

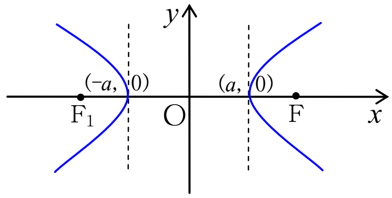


그림 1-44

2° 쌍곡선도 타원처럼 x축과 y축 그리고 자리표원점에 관하여 대칭이다. 이 대칭중심을 쌍곡선의 중심이라고 부른다.

3° **쌍곡선의 정점**: 쌍곡선과 자리표축과의 사귐점을 쌍곡선의 정점이라고 부른다.

쌍곡선은 두개의 정점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$을 가진다.

4° **쌍곡선의 점근선** : 쌍곡선의 방정식을 고쳐쓰면

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

1사분구에 있는 쌍곡선의 가지

$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ $(x \ge a)$와 함께 직선

$y=\frac{b}{a}x$ 를 살펴보자.(그림 1-45)

$$\frac{b}{a}x > \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

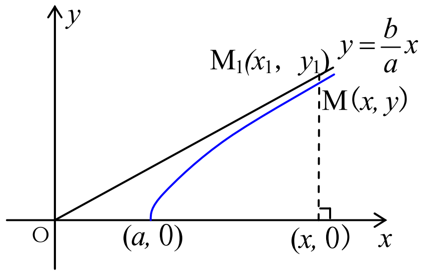


그림 1-45

이므로 x자리표가 같은 쌍곡선과 직선의 점을 각각 $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$이라고 하면

$$y_1 > y$$

따라서 쌍곡선은 직선 $y=\frac{b}{a}x$ 아래에 놓인다.

$$y_1 - y = \frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

즉 x가 커짐에 따라 쌍곡선이 직선

$y=\frac{b}{a}x$에 한없이 가까와간다.

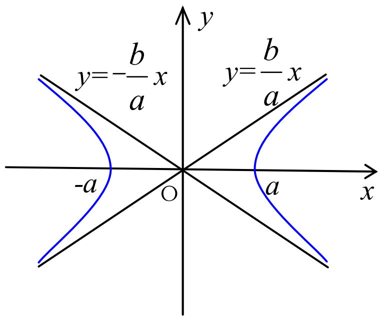


그림 1-46

이 직선을 쌍곡선의 **점근선**이라고 부른다.

그림 1-46에서 보는것처럼 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에는 두개의 점근선 $y=\pm\frac{b}{a}x$가 있다.

5° **쌍곡선의 리심률**: 쌍곡선에서 $e=\frac{c}{a}$를 쌍곡선의 리심률이라고 부른다.

쌍곡선에서는 $c>a>0$이므로 $e>1$이다. e가 클수록 쌍곡선의 가지는 벌어지며 $e\to1$이면 가지는 접근한다.

6° **쌍곡선의 준선**: 쌍곡선에서도 L: $x=\pm\frac{a}{e}$인 직선을 쌍곡선의 준선이라고 부른다. 쌍곡선의 준선은 $e>1$이므로 쌍곡선가지안에 놓인다. 쌍곡선의 점으로부터 초점까지 거리와 준선까지 거리의 비는 일정하다.

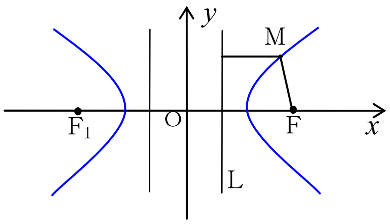


그림 1-47

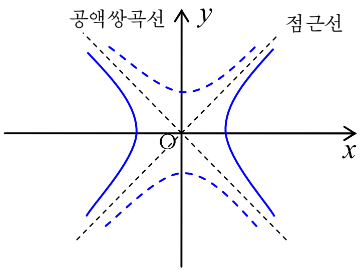


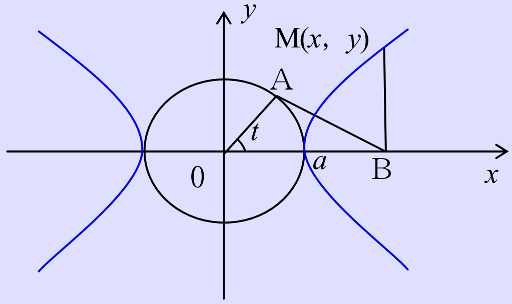
그림 1-48

7° 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$로 표시되는 쌍곡선을 주어진 쌍곡선의 **공액쌍곡선**이라고 부른다.

탐 구

쌍곡선의 보조변수방정식을 구하여라.

(참고. 그림에서 ***x***, ***y***를 각 ***t***로 표시하여라.)



문 제

1. 다음과 같은 쌍곡선의 표준방정식을 구하여라.

   1) $a=2$, $b=3$ 2) $b=4$, $c=5$ 3) $a=3$, $c=4$

2. 다음 곡선의 방정식을 표준방정식으로 고치고 자리표원점으로부터 초점까지의 거리를 구하여라.

   1) $9x^2-16y^2=144$ 2) $3x^2-\frac{1}{4}y^2=4$

   3) $2x^2=15+7y^2$ 4) $6x^2-12=9y^2$

3. 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고 그림을 그려라.

   1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 2) $25x^2-16y^2=400$

4. 이동점 M에서 고정점 A(1, 1)까지의 거리와 점 M에서 고정점 B(-1, 1)까지의 거리를 던 차가 부아닌 실수 a(상수)이다. 이때 이동점 M의 자리길을 아래에서 찾아보아라.

   1) 쌍곡선의 하나의 가지

   2) 쌍곡선의 하나의 가지 또는 하나의 직선

   3) 쌍곡선의 하나의 가지 또는 하나의 직선 또는 하나의 선

   4) 이외에 또 다른 경우가 있다.

5. 타원 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$의 초점을 지나고 타원이 x축과 사귀는 점들을 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

6. 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 왼쪽초점으로부터 거리가 7인 쌍곡선의 점을 구하여라.

7. 그림 1-49를 보고 쌍곡선을 그리는 방법을 설명하고 그 근거를 밝혀라.

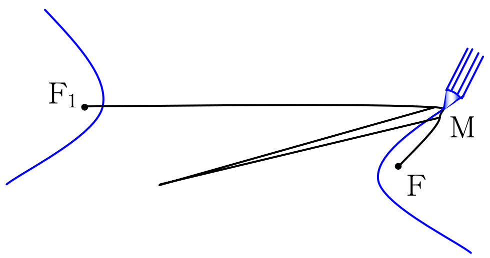


그림 1-49

4. 포물선의 방정식

평면에서 주어진 점 F와 주어진 직선 L까지의 거리가 같은 점들로 이루어진 도형을 **포물선**이라고 부른다. 이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 L을 포물선의 **준선**이라고 부른다.

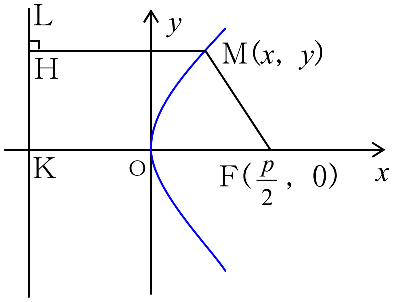


그림 1-50

포물선의 방정식을 구하자.

초점 F에서 준선 L에 수직선 FK를 긋고 FK의 가운데점 O를 자리표원점으로 정하자.

그리고 직선 FK를 x축으로, O를 지나며 KF에 수직인 직선을 y축으로 잡자. (그림 1-50)

KF=p 라고 하면 F($\frac{p}{2}$, 0)이고 L의 방정식은 $x=-\frac{p}{2}$ 이다. 준선이 L이고 초점이 F인 포물선의 임의의 점을 M(x, y)라고 하면 MH=MF

그런데

$$\mathrm{MH}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,\quad \mathrm{MF}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$$

이므로

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

이 방정식의 두변을 2제곱하고 정돈하면

$$y^2=2px$$

따라서 포물선의 방정식은

$$y^2=2px$$

이것을 **포물선의 표준방정식**이라고 부른다.

포물선의 기하학적성질

1° 포물선 $y^2=2px$ 에서 $(\pm y)^2=2px$ 이므로 x 축이 대칭축이라는것을 알수 있다.

2° 포물선과 대칭축과의 사귐점을 포물선의 **정점**이라고 부른다.

3° 포물선 $y^2=2px$는 p에 따라 다음과 같은 모양을 가진다. (그림1-51)

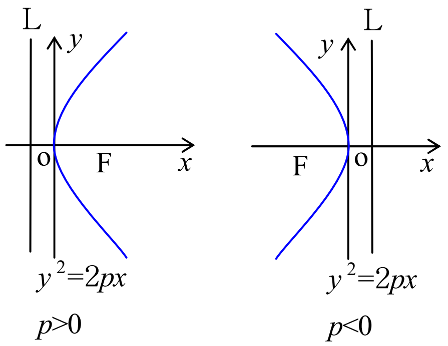


그림 1-51

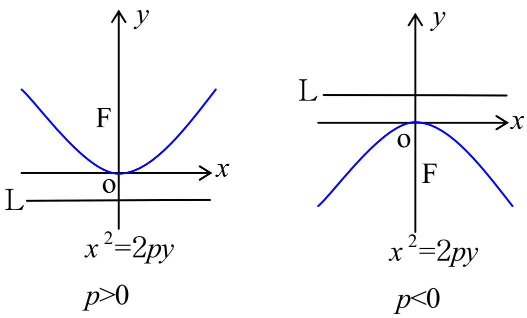


그림 1-52

또한 포물선의 방정식은 $x^2=2py$와 같이 구할수도 있다.(그림 1-52)

포물선 $x^2=2py$에서는 y축이 대칭축이다.

4° 포물선의 리심률은 포물선의 점으로부터 초점까지 거리와 준선까지 거리의 비로 정의되는데 그것은 늘 $e=1$이다.

다음으로 포물선의 보조변수방정식을 구해보자.

포물선 $y^2=2px$에서 $y=t$, $t\in \mathrm{R}$ 로 놓으면

$$x=\frac{t^2}{2p}$$

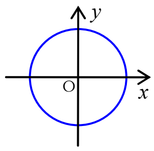
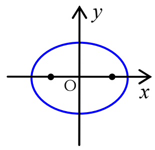
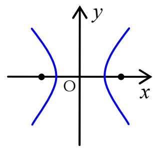
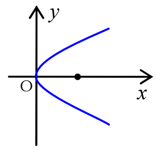
따라서 포물선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2p} \\ y=t \end{cases}$$

탐 구

탐조등반사경의 자름면은 포물선형태로 되여있는데 광원은 포물선의 초점에 있다. 포물선의 임의의 점 $m_0(x_0, y_0)$에서 x축에 평행인 직선과 그 점에서 그은 접선사이의 각은 점 M_0과 초점 F를 련결한 직선과 접선사이의 각과 같다는것을 밝혀보아라.

원뿔곡선의 특성

	원	타 원	쌍곡선	포물선
기하학적 조건	주어진 점까지 거리가 같다	주어진 두 점까지 거리합이 상수다	주어진 두 점까지 거리의 차가 상수다	주어진 점과 주어진 직선까지의 거리가 같다
표준방정식	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
도 형				
정점의 자리표	$(\pm a,\ 0),\ (0,\ \pm a)$	$(\pm a,0),(0,\pm b)$	$(\pm a,\ 0)$	$(0,\ 0)$
대칭축	x축, y축(길이 $2a$)	x축(긴반경길이 $2a$) y축(짧은반경길이 $2b$)	x축(실축길이 $2a$) y축(허축길이 $2b$)	x축
초점 자리표	$(0,0)$	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$
리심률	0	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$
준선의 방정식		$x=\pm\dfrac{a}{e}$	$x=\pm\dfrac{a}{e}$	$x=-\dfrac{p}{2}$
점근선의 방정식			$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	

문 제

1. 점 F를 지나며 직선 L에 접하는 원의 중심의 자리길은 점 F를 초점, 직선 L을 준선으로 하는 포물선이라고 말할수 있는가?(그림 1-53)

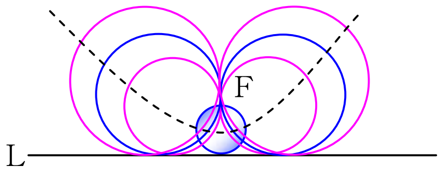


그림 1-53

2. 다음과 같은 포물선의 표준방정식을 구하여라.
   1) $p=4$, x축을 대칭축으로 하고 y축의 오른쪽 반평면에 있다.

2) $p=6$, y축을 대칭축으로 하고 x축의 웃쪽 반평면에 있다.

3. 다음과 같은 포물선의 방정식을 표준방정식으로 고치고 p를 구하여라. 그리고 그림을 그려라.

1) $\frac{1}{8}y^2 = x$ 2) $3y^2 = 2x$ 3) $3x^2 = -4y$ 4) $6x - y^2 = 0$ 5) $x^2 + 5y = 0$

4. 자리표평면에서 점 F(0, 3)을 초점으로 하고 직선 $y=-5$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하고 이 곡선이 자리표축과 사귀는 점을 구하여라.

5. 포물선 $y=x^2$ 의 점으로부터 직선 $2x-y-4=0$ 까지의 거리가 가장 짧은 점의 자리표를 아래에서 찾아라.

1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 2) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 3) $(2, 4)$ 4) $(1, 1)$

탐 구

방정식 $xy=1$ 은 직각자리표계를 45° 회전이동한 새 직각자리표계에서 쌍곡선의 표준방정식형태로 표시된다는것을 밝혀라.

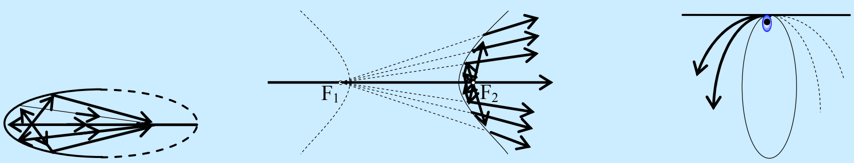
상 식

원뿔곡선의 특징

작은 전구에서 나오는 빛은 분산되지만 그것을 손전지에 넣고 조절하면 한줄기의 평행광선이 얻어진다. 이것은 전지안에 자름면이 포물선인 반사면이 있기때문이다. 이 성질을 리용하여 태양로, 안테나, 탐조등이 설계되고있다.

타원과 쌍곡선의 초점의 성질은 포물선과는 다르다.

영사기의 투광기는 타원의 초점의 성질을 리용하고있다.



우주에서 운동하는 천체 례를 들어 행성, 혜성, 인공위성 등은 운동속도가 달라짐에 따라 그 자리길이 어떤것은 타원이고 어떤것은 포물선이며 어떤것은 쌍곡선이다.

태양계의 9개 행성 및 그 위성의 운동자리길은 모두 타원형태이다. 그러나 혜성의 운동자리길은 타원형, 쌍곡선형, 포물선형으로 나뉘여진다. 자리길이 타원형인 혜성은 주기혜성이라고 부르는데 유명한 할레혜성은 주기가 76년이다.

자리길이 쌍곡선형과 포물선형인 혜성을 비주기혜성이라고 부르는데 이것은 한번밖에 볼수 없으며 그후에는 영원히 다시 돌아오지 않는다.

련 습 문 제

1. 중심이 (3, -3)이고 반경이 3인 원둘레의 방정식을 구하고 이것을 $\frac{2}{3}$ 로 압축하여 얻은 타원의 방정식을 구하여라.

2. 다음과 같은 원뿔곡선의 방정식을 표준형으로 고쳐라. 다음 초점의 자리표를 구하고 그림을 그려라.

   1) $4x^2+y^2=16$ 2) $x^2-2y^2+4=0$ 3) $6x-y^2=0$

   4) $4x^2=16+y^2$ 5) $x^2+5y=0$ 6) $2x^2=18-9y^2$

3. 다음과 같은 원뿔곡선의 표준방정식을 구하여라.

   1) $a=4$, $c=3$인 타원

   2) $c=3$, 두 점근선사이의 각이 $90°$인 쌍곡선

   3) 준선의 방정식이 $y=-3$인 포물선

4. 반경이 r인 원둘레와 그안에 한 점 p가 있다. 점 p를 지나며 원둘레 0에 접하는 모든 원둘레의 중심들의 모임은 타원이다. 증명하여라.

5. 복소수평면에서 점 $z=x+yi$가 원둘레 $x^2+y^2=r^2$을 따라 움직일 때 다음 복소수는 어떤 도형을 그리겠는가?

   1) $w=\frac{1}{z}$ 2) $w=az+b(a,\ b\in \mathrm{R},\ a\neq 0)$ 3) $w=z+\frac{a}{z}(r^2>a)$

6. 직선 $y=kx+2$가 쌍곡선 $x^2-y^2=6$ 의 오른쪽가지와 서로 다른 두 점에서 사귄다면 k가 가질수 있는 값의 범위를 구하여라.

7. 다음의 방정식은 어떤 곡선의 방정식인가?

   1) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ 2) $x^2+2y^2+4x-6y+5=0$

   3) $2x^2-y^2-4x+4y=0$ 4) $y^2-2y-6x+1=0$

8. 대칭축이 자리표축과 겹치고 리심률이 $e=0.8$이며 초점과 준선사이 거리가 $\frac{9}{4}$ 인 타원의 방정식을 구하여라.

9. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 의 리심률이 $e\in(1\ ,\ 2)$ 라면 k의 값범위를 구하여라.

10. 쌍곡선에서 $c=\sqrt{13}$, 점근선이 $y=\pm\frac{2}{3}x$ 인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

11. 포물선 $y^2=2px$ 의 $x=6$ 인 점에서 초점까지의 거리가 10이라면 초점에서 준선까지의 거리를 구하여라.

제 4 절. 공간에서 평면과 직선의 방정식

1. 평면의 방정식

1) 점 M_0을 지나고 벡토르 N에 수직인 평면의 방정식

점 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나고 벡토르 $\vec{N}=\{A, B, C\}$ 에 수직인 평면 P의 방정식을 유도하자.

평면우의 임의의 한 점 $M(x, y, z)$를 잡으면

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$$

$$M(x, y, z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{N}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0$$

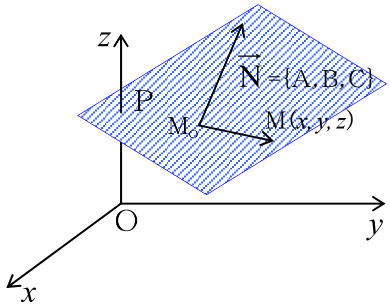


그림 1-54

이것을 자리표로 표시하면

법선벡토르에 의한 평면의 방정식

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

벡토르 $\vec{N}=\{A, B, C\}$를 **평면의 법선벡토르**라고 부른다.

2) 평면의 일반방정식

평면의 방정식이 공간에서 1차방정식으로 표시된다는것을 보았다.

이제 공간에서 x, y, z에 관한 1차방정식

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (*)$$

이 평면의 방정식이라는것을 보자.

결수 A ,B ,C는 다 0일수 없다.

실례로 $c\neq 0$ 이라면 이 방정식은

$$A(x-0)+B(y-0)+C\left(z-\frac{D}{C}\right)=0$$

형태로 쓸수 있으면 이것은 점 $\left(0,\ 0,\ -\frac{D}{C}\right)$를 지나며 $\vec{N}=\{A, B, C\}$에 수직인 평면의 방정식이다.

방정식 (*)은 A, B, C, D에 적당한 값을 주면 어떤 평면을 결정한다.

방정식

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

을 평면의 일반방정식이라고 부른다.

결수들의 의미를 고찰하자.

평면의 일반방정식에서 $\vec{N} = \{A, B, C\}$는 평면의 법선벡토르이다.

1° D=0 인 경우

이때 방정식은

$$Ax + By + Cz = 0$$

이 되므로 점 O(0, 0, 0)은 이 방정식을 만족시킨다. 따라서 평면은 자리표원점을 지난다. 이것은 D=0인 경우에 자리표원점을 지나는 평면임을 의미한다.

2° C=0 인 경우

이때 방정식은

$$Ax + By + D = 0$$

이 되므로 이것은 z축에 평행인 평면이다.

마찬가지로 A=0이면 $By + Cz + D = 0$ 으로 되는데 이것은 x축에 평행인 평면이며 B=0이면 $Ax + Cz + D = 0$ 으로 되는데 이것은 y축에 평행인 평면이다.

3° A=0, B=0인 경우

이때 방정식은

$$Cz+D=0$$

이 되므로 이것은 x축과 y축에 평행 즉 z축에 수직인 평면이다.

마찬가지로 B=C=0 이면 $Ax+D=0$으로 되는데 이것은 x축에 수직인 평면이며 A=C=0이면 $By+D=0$으로 되는데 이것은 y축에 수직인 평면이다.

례 1 점 $M_0(2, 3, -1)$ 을 지나며 벡토르 $\vec{N}=\{4, -3, 1\}$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

(풀이) $4(x-2)+(-3)(y-3)+(z+1)=0$

또는 $4x-3y+z+2=0$

례 2 다음 평면은 어떤 특징을 가지는가?

(1) $3x-2z+4=0$　　(2) $3y-6=0$

(3) $x-3=0$　　(4) $y=0$

(풀이) (1)은 y축에 평행인 평면　　(2)는 Oxz평면에 평행인 평면

(3)은 Oyz평면에 평행인 평면　　(4)는 Oxz평면

문 제

1. 자리표원점을 지나며 벡토르 $\vec{N}=\{3,\ 1,\ 3\}$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
2. 점 $M_0(2, 3, 1)$을 지나며 x축에 수직인 평면, y축에 수직인 평면, z축에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
3. 두 점 $M_1(4, -2, -1)$, $M_2(3, -1, 2)$가 주어졌다. 점 M_1을 지나고 벡토르 $\overrightarrow{M_1M_2}$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
4. 점 $P(2,\ -1,\ 3)$을 지나며 두 점 $M_1(3, 5, 1)$, $M_2(2,\ -3,\ 1)$을 지나는 직선에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
5. 평면의 일반방정식 $Ax+By+Cz+D=0$에서 A, B, C, D가운데서 하나가 령이거나 둘이 령일 때의 평면의 위치는 어떻게 되겠는가?

2. 직선의 방정식

1) 방향벡토르에 의한 직선의 방정식

점 M_0 (x_0, y_0, z_0)을 지나고 벡토르 $\vec{P}=\{X, Y, Z\}$ $(\vec{P}\neq\vec{0})$에 평행인 직선의 방정식을 유도하자.

직선 L의 한 점 $M(x, y, z)$를 잡으면

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$$

$M(x,\ y,\ z)\in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\,//\,\vec{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}=t\vec{P}$인 t가 존재한다.

이것을 자리표로 표시하면 다음과 같다.

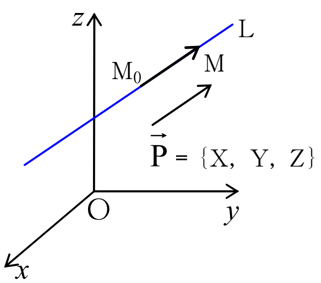


그림 1-55

직선의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \\ z = z_0 + Zt \end{cases}$$

이 식에서 t를 **직선의 보조변수**라고 부른다.

우의 방정식에서 t를 소거하면

방향벡토르에 의한 직선의 방정식

$$\frac{x-x_o}{X}=\frac{y-y_o}{Y}=\frac{z-z_o}{Z}$$

을 얻으며 여기서 벡토르 $\vec{P}=\{X, Y, Z\}$를 **직선의 방향벡토르**라고 부른다.

례 1 점 (1, 2, 3)을 지나고 벡토르 $\vec{P}=\{-2, 3, 7\}$에 평행인 직선의 보조변수방정식, 방향벡토르에 의한 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 우의 식에 의해서 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+3t \\ z=3+7t \end{cases}$$

이며 방향벡토르에 의한 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{7}$$

2) 직선의 일반방정식

공간에서 사귀는 두 평면은 한개의 직선을 결정한다.

따라서 두 평면의 방정식을 련립시킨

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 : P_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 : P_2 \end{cases}$$

을 공간에서 **직선의 일반방정식**이라고 부른다.

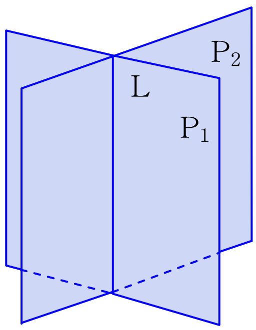


그림 1-56

례 2 직선의 일반방정식

$$\begin{cases} 2x-y+3z-6=0 \\ x+y-5z+10=0 \end{cases}$$

을 방향벡토르에 의한 직선의 방정식으로 고치여라.

(풀이) z를 오른변으로 옮기면

$$2x - y = -3z + 6$$

$$x + y = 5z - 10$$

x , y 를 구하면

$$x = \frac{2z-4}{3}, \quad y = \frac{13z-26}{3}$$

이 두 식에서 z를 구하면

$$\frac{3x+4}{2} = \frac{3y+26}{13} = z$$

여기로부터

$$\frac{x+\frac{4}{3}}{2} = \frac{y+\frac{26}{3}}{13} = \frac{z}{3}$$

이것은 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{26}{3}, 0\right)$을 지나며 방향벡토르가 $\{2, 13, 3\}$ 인 직선의 방정식이다.

문 제

1. 다음 직선의 방정식을 보조변수방정식으로 고쳐라.

   1) $M_0(2, -1, 3)$, $\overrightarrow{M_0M} = \{1, 2, -4\}$

   2) $\frac{x+3}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{2}$

2. 두 점 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

3. 점 M(2, 3, 1) 을 지나고 벡토르 $\vec{P} = \{5, 6, 7\}$에 평행인 직선의 방정식을 구하여라.

4. 직선의 일반방정식이 다음과 같이 주어졌다.

   1) $\begin{cases} 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ 5x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - z + 5 = 0 \end{cases}$

   이 방정식을 방향벡토르에 의한 직선의 방정식으로 고치여라.

련 습 문 제

1. 자리표원점을 지나며 벡토르 $\vec{n}=\{5,\ 0,\ -2\}$ 에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
2. 점 A(4, -3, 3)을 지나며 y축에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
3. 점 P(1, -1, 2)를 지나며 두 점 A(5, 1, -5), B(-1, 3, 7)을 지나는 직선에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
4. 점 P(3, -6, 2)가 자리표원점으로부터 평면에 세운 수직선의 밑점이라는것을 알고 그 평면의 방정식을 구하여라.
5. 점 A(4, 3, -2)를 지나며 다음것에 평행인 직선의 방정식을 구하여라.

   1) y축　　2) $\vec{a}=\{1,\ 7,\ 5\}$　　3) 직선 $\dfrac{x+9}{3}=\dfrac{y-8}{10}=\dfrac{z-5}{-2}$
6. 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

   1) A(1, 4, -1), B(3, 0, -2)　　2) C(0, 5, -1), D(7, 1, -4)
7. 다음 세 점이 한 직선에 놓이겠는가?

$$A(3,\ 0,\ 1)\ ,\ B(0,\ 2,\ 4)\ ,\ C\left(1,\frac{4}{3},3\right)$$

8. 직선의 일반방정식을 방향벡토르에 의한 방정식으로 고쳐라.

   1) $\begin{cases}4x+3y-z+20=0\\3x-2y+3z-8=0\end{cases}$　　2) $\begin{cases}5x-2y+7z-9=0\\4x-3y-1=0\end{cases}$
9. 두 직선

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-2}{p}\ ,\quad \frac{x-7}{12}=\frac{y-9}{n}=\frac{z+9}{4}$$

   가 평행이다. n, p를 구하여라.
10. 평면 $3x-2y+3z-8=0$과 직선 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{5}$의 사귐점을 구하여라.

제 5 절. 구면과 기둥면의 방정식

직각자리표계가 도입된 공간에서 곡면 S의 임의의 점 M의 자리표 $x,\ y,\ z$가 방정식

$$F(x,\ y,\ z)=0 \qquad (*)$$

을 만족시키고 거꾸로 방정식 (*)을 만족시키는 $x,\ y,\ z$를 자리표로 하는 점 $M(x,\ y,\ z)$가 곡면 S에 놓일 때 방정식 (*)을 **곡면 S의 방정식**이라고 부른다.

$$M(x,\ y,\ z)\in S \Leftrightarrow F(x,\ y,\ z)=0$$

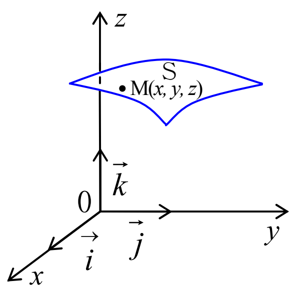


그림 1-57

1. 구면의 방정식

주어진 점 C(a, b, c)로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임으로 된 도형을 **구면**이라고 부른다. 이때 C(a, b, c)를 **중심**, 거리 r를 **반경**이라고 부른다.

구면에 놓이는 임의의 점을 M(x, y, z)라고 하면

$$\mathrm{CM}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이므로 중심이 C(a, b, c)에 있고 반경이 r인 구면의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \qquad (1)$$

자리표원점과 구면의 중심이 일치하면 구면의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (2)$$

례 1 중심이 C(−1, 4, −2)에 있고 반경이 5인 구면의 방정식을 구하여라.

(풀이) 구면의 방정식 (1)을 리용하면 구하려는 구면의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=25$$

례 2 방정식 $x^2+y^2+z^2-4x+10y-1=0$ 으로 표시되는 구면의 중심과 반경을 구하여라.

(풀이) 방정식을

$$x^2-4x+4+y^2+10y+25+z^2-4-25-1=(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=30$$

으로 고친다. 이로부터 구면의 중심은 (2, −5, 0)이고 반경은 $\sqrt{30}$ 이다.

일반적으로 구면의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2+2\mathrm{A}x+2\mathrm{B}y+2\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0 \qquad (3)$$

으로 표시할수 있다. 이것을

$$(x+\mathrm{A})^2+(y+\mathrm{B})^2+(z+\mathrm{C})^2=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-\mathrm{D}$$

로 쓰면 $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-\mathrm{D}>0$ 일 때 이 식은 중심이 $(-\mathrm{A}, -\mathrm{B}, -\mathrm{C})$ 에 있고 반경이 $\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-\mathrm{D}}$ 인 구면을 표시한다.

(3)을 **구면의 일반방정식**이라고 부른다.

구면의 일반방정식은 x^2, y^2, z^2 의 곁수들이 모두 같고 xy, xz, yz 를 포함하는 마디들이 없는것이 특징이다.

례 3 점 (0, 1, 6), (1, 5, 9), (4, 4, 5), (0, 5, 2)을 지나는 구면의 방정식을 구하여라.

(풀이) 점들의 자리표를 방정식 (3)에 넣으면

$$1+\ 36+2\mathrm{B}+12\mathrm{C}+\mathrm{D}=0$$

$$1+25+81+2A+10B+18C+D=0$$
$$16+16+25+8A+8B+10C+D=0$$
$$25+4+10B+4C+D=0$$

이다. 이것을 풀면

$$A=-2,\ B=-3,\ C=-7,\ D=53$$

결국 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$ 형태로 고칠수 있다. 따라서 이 구면은 중심이 (2, 3, 7)에 놓이고 반경이 3인 구면이다.

문 제

1. 중심이 C(4, -2, 3)이고 자리표원점을 지나는 구면의 방정식을 구하여라.
2. 중심이 자리표원점에 있고 점 B(1, 7, -3)을 지나는 구면의 방정식을 구하여라.
3. 구면에서 직경의 두 끝점은 A(5, -1, 4), B(3, 5, 2)이다. 구면의 방정식을 구하여라.
4. 다음의 방정식으로 주어진 구면의 중심과 반경을 구하여라.
   1) $x^2+y^2+z^2-12x-16y+20z-10=0$
   2) $x^2+y^2+z^2-3x+9y-5z=0$

2. 기둥면의 방정식

주어진 직선 ℓ에 평행인 직선이 정해진 곡선 L을 따라 움직여서 생긴 곡면을 **기둥면**이라고 부른다.

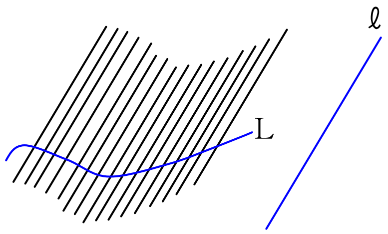


그림 1-58

이때 L을 기둥면의 **도선**, ℓ에 평행이며 L의 점을 지나는 직선을 기둥면의 **모선**, ℓ을 **기준선**이라고 부른다.

이제 도선 L이 Oxy평면의 곡선 즉

$$F(x,\ y)=0$$

이고 ℓ이 z축에 평행인 직선인 기둥면의 방정식을 보자.

이 기둥면의 임의의 점을 M(x, y, z)라고 하면 M의 Oxy평면에로의 사영점 N(x, y, 0)은 도선 L에 놓이므로 x, y는 방정식 F(x, y)=0을 만족시킨다. 그런데 M과 N의 x, y자리표들은 같고 방정식 F(x, y)=0에는 z가 없으므로 임의의 z에 대하여

M(x, y, z)의 자리표 x, y는 F(x, y)=0을 만족시킨다. 그러므로 Oxy 평면에서 도선의 방정식과 공간에서 기둥면의 방정식은 형태적으로 일치한다.

따라서 구하려는 기둥면의 방정식은 공간에서

$$F(x,\ y)=0$$

으로 표시된다.

례 1 $x^2+y^2=9$ 는 Oxy평면에서 중심이 자리표원점에 있고 반경이 3인 원을 도선으로 하고 z축에 평행인 모선으로 되여있는 원기둥면의 방정식이다.

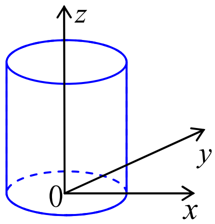


그림 1-59

례 2 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 은 Oxy 평면에서 긴반경이 3이고 짧은 반경이 2인 중심이 자리표원점에 있는 타원을 도선으로 하고 z축에 평행인 모선들로 되여있는 타원기둥면의 방정식이다.

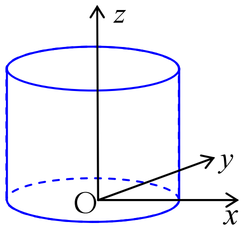


그림 1-60

례 3 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 은 Oxy 평면에서 실반경과 허반경이 각각 a, b인 중심이 자리표원점에 있는 쌍곡선을 도선으로 하고 z축에 평행인 모선들로 되여있는 쌍곡기둥면의 방정식이다.

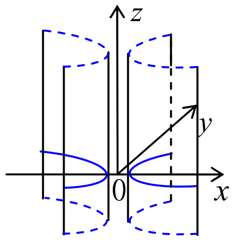


그림 1-61

례 4 $y^2=2px$ 는 Oxy 평면에서 초점이 $\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$에 있고 정점이 자리표원점과 일치하는 포물선을 도선으로 하고 z축에 평행인 모선들로 되여있는 포물기둥면의 방정식이다.

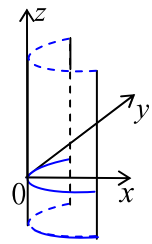


그림 1-62

문 제

1. 방정식 $x^2+z^2=9$ 로 표시되는 기둥면을 그려라.
2. 방정식 $x^2+y^2-8x+6y+9=0$ 로 표시되는 기둥면을 그려라.
3. 방정식 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 로 표시되는 기둥면을 그려라.
4. 방정식 $y^2=4x$ 로 표시되는 기둥면을 그려라.
5. 방정식 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 로 표시되는 기둥면을 그려라.
6. 방정식 $x^2=z$ 로 표시되는 기둥면을 그려라.

련 습 문 제

1. 중심이 A(4, 1, -1)이고 점 B(1, 0, 3)을 지나는 구면의 방정식을 구하여라.
2. 방정식이 다음과 같은 구면의 중심과 반경을 구하여라.
   1) $(x-3)^2+(y+10)^2+(z-11)^2=49$
   2) $(x+1)^2+y^2+(z-5)^2=40$
3. 두 구면

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z-4=0$$

$$x^2+y^2+z^2-6y-8z-24=0$$

의 중심사이의 거리와 중심선의 방정식을 구하여라.

4. 구면 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=49$ 와 직선 $\frac{x+6}{5}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z+10}{4}$ 의 사귐점을 구하여라.
5. 방정식 $f(x, y, z)=0$ 은 어떤 도형의 방정식인가를 밝히고 다음 기둥면들을 그려라.
   1) $2x+5z-10=0$
   2) $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$
6. 점 A(2, -1, 4)로부터 구면 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$ 까지의 거리를 구하여라.

복습문제

1. 평행4변형 ABCD에서 A(-3, 5), B(4, 0), C(2, -7)일 때

   1) 점 D 및 두 대각선의 사귐점 P의 자리표를 구하여라.

   2) 대각선의 길이를 구하여라.

   3) 두 대각선사이의 각을 구하여라.

2. 3각형 ABC의 무게중심을 G, 평면의 임의의 점을 P로 표시할 때 다음 식이 성립한다는것을 증명하여라.

   1) $\overrightarrow{PG}=\frac{(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})}{3}$　　2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

3. 자리표평면에서 자리표가 (-3, 2)인 점 A에서 점 M(4, -8), N(2, -1)을 바라보는 각을 구하여라.

4. 자리표평면에 세 정점이 A(1, 3), B(2, 1), C(10, 5)인 3각형이 있다. 이 3각형은 직3각형인가?

5. 다음과 같은 직선의 방정식을 벡토르방정식, 방향벡토르에 의한 방정식, 법선벡토르에 의한 방정식, 방향결수에 의한 방정식으로 고치고 그림을 그려라.

   1) $x+3y-5=0$　　2) $3x-2y=0$

   3) $2y-7=0$　　4) $3x+5=0$

6. 두 직선 $kx-y-9=0$, $2x+y+5=0$이 평행 또는 수직이 되게 k의 값을 구하여라.

7. 직선 $(2m-n+1)x+(m+n+2)y+4n-5=0$이 y축에 평행이면서 x축과 점 A(2, 0)에서 사귀도록 m, n의 값을 정하여라. 그리고 이때 이 직선의 방정식을 구하여라.

8. 직선 $ax+4y-2=0$과 $2x-5y+b=0$은 점 A(1, m)에서 수직으로 사귄다. a, b, m을 구하여라.

9. 다음과 같은 도형의 방정식을 구하여라.

1) 중심이 (3, -2) 이고 반경이 7인 원의 방정식

2) $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$ 인 타원의 보조변수방정식

3) $c=5$, 점근선이 $y=\pm\frac{4}{3}x$ 인 쌍곡선

4) $p=10$, x축에 관해서 대칭이고 y축의 왼쪽에 있는 포물선

10. y축에 관하여 대칭이고 직선 $x+y=0$과 원 $x^2+y^2+8y=1$ 의 사귐점을 지나는 포물선의 방정식을 구하여라.

11. 직선 $x+\sqrt{3}y-m=0$ 과 $x^2+y^2=1$ 은 1사분구안의 서로 다른 두 점에서 사귄다면 m의 값범위를 구하여라.

12. 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 과 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1\ (k<9)$에서 긴축, 초점, 준선, 리심률에서 서로 같은것은 무엇인가?

13. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 과 공통점근선을 가지며 점 $(-3,\ 2\sqrt{3})$을 지나는 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

14. 평면의 세 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 이 한 직선에 놓이면 행렬식

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

의 값은 어떻게 되겠는가?

15. 벡토르 $\vec{a}=\{-3,\ 2,\ 4\}$와 점 A(1, 0, -2), B(m, -4, n)를 맺는 벡토르가 공선이라는것을 알고 m, n을 구하여라.

16. $\vec{a}=\{4,\ -3,\ 1\}$, $\vec{b}=\{1,\ 0,\ -2\}$, $\vec{c}=\{5,\ 1,\ 3\}$, $\vec{d}=\{-1,\ 2,\ 6\}$ 일 때 다음 벡토르를 구하여라.

1) $\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}-\vec{d}$ 2) $3(\vec{a}+\vec{b})-4(\vec{c}-\vec{d})$ 3) $5\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}+2\vec{d}$

17. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ 이고 $\left(\vec{a}\ \widehat{}\ \vec{b}\right)=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{a})$를 구하여라.

18. $\vec{a}=\{0,\ 0,\ -2\}$, $\vec{b}=\{9,\ -7,\ 5\}$, $\vec{c}=\{3,\ 1,\ 2\}$일 때 벡토르 $3\vec{a}-2\vec{b}+5\vec{c}$의 길이를 구하여라.

19. 점 M(-1, 5, 4)을 지나며 직선 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z+4}{-2}$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

20. 두 평면 $2x-3y+5z-6=0$과 $x+5y-7z+10=0$의 사귐선의 방향벡토르에 의한 방정식을 구하여라.

21. 점 A(9, 0, 5), B(-1, 4, 1)이 주어졌다. 선분 AB를 수직2등분하는 평면의 방정식을 구하여라.

22. 구면 $(x+2)^2+(y-2)^2+(z+9)^2=49$와 직선

$$\begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 5x-3y+2z+1=0 \end{cases}$$

의 사귐점을 구하여라.

새로 나온 수학 - 프락탈기하학

3각형, 다각형, 원, 다면체, 구 등은 2차원 및 3차원공간에서 고찰되는 표준도형들이다.

이와는 달리 해안선, 강줄기, 별의 분포, 산줄기걸면 등은 자연도형으로서 그 차원을 고찰하면 비옹근수차원을 가지는것이 대부분이다.

선분, 원둘레, 절선 등은 1차원도형이고 아마존강줄기와 같은 도형은 곡선형태이지만 비옹근수차원을 가진다는것이 알려졌다.

이러한 표준도형이 아닌 자연도형을 프락탈도형이라고 부른다.

프락탈이라는 용어는 1975년에 라틴어 《fractus》(〈부스러뜨리다〉 또는 〈절반으로 가르다〉)에서 생겼는데 원유탐사과정에 원유의 분포도를 확정하는 문제를 연구하면서 새로운 수학분야로 프락탈기하학이 창시되였다. 자연현상은 그 자체의 고유한 성질로 각이한 형태로 묘사되는데 그것을 기하학적으로 고찰하는 분야가 바로 프락탈기하학이다.

21세기에 들어오면서 비선형수학이 수학의 주류로 되면서 프락탈기하학은 카오스, 웨이블레트와 함께 현대응용수학의 3대분야로 되였다.

제 2 장. 도함수와 그 응용

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$f'(x)$$

제 1 절. 수렬의 극한

1. 수렬의 수렴과 발산

알아보기 다음 수렬들에서 마디의 번호가 끝없이 커질 때 매 마디가 어떻게 변하는가를 알아보아라.

1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$

2) $2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots$

3) $3,\ -3,\ 3,\ -3,\ \cdots$

첫째 수렬에서와 같이 마디의 번호 n이 끝없이 커질 때 마디의 값이 일정한 수로 얼마든지 가까와가는 수렬의 변화를 나타내기 위하여 수렴한다는 개념을 받아들인다.

수렬 (a_n)에서 마디의 번호 n이 끝없이 커질 때 a_n이 일정한 수 a로 얼마든지 가까와가면 수렬 (a_n)은 수 a로 수렴한다고 말하고 다음과 같이 표시한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 또는 \quad a_n \to a(n\to\infty)$$

그리고 수 a를 수렬 (a_n)의 극한이라고 부른다.

례 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

2) $a_n=\frac{n+1}{n}$ 일 때 $a_n=1+\frac{1}{n}$ 이므로

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n},\cdots$$

은 n이 끝없이 커질 때 얼마든지 1에 가까와간다. 즉

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

3) $a_n=c$(c는 상수)일 때 n=1, 2, 3,$\cdots$ 이면 $c,\ c,\ c,\cdots$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

수렬 (a_n)이 극한을 가지지 않으면 수렬 (a_n)은 발산한다고 말한다.

앞에서 본 둘째 수렬 $(2n)$에서와 같이 n 이 끝없이 커질 때 마디의 값이 얼마든지 커지면 수렬은 무한대로 발산한다고 말한다.

또한 셋째 수렬($(-1)^{n-1}3$)에서와 같이 마디가 몇개의 값을 차례로 되풀이하여 잡으면서 일정한 수로 가까와가지 않으면 수렬은 발산(진동)한다고 말한다.

문 제

1. 다음 수렬가운데서 수렴하는 수렬을 갈라내고 그 극한이 얼마인가를 말하여라.

   1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$ 2) 2, 2, 2, …

   3) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots$ 4) 1, 4, 9, 16, …

2. 다음 수렬가운데서 수렴하는 수렬과 발산하는 수렬을 갈라내여라.

   1) 5, 3, 1, -1, … , $7-2n$, …

   2) 0.9, 0.99, 0.999, …

   3) $\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\pi,\ \sin\frac{3}{2}\pi,\ \sin2\pi,\ \cdots$

   4) 3, -9, 27, -81, …

   5) $1-\frac{1}{2},\ 1+\frac{2}{3},\ 1-\frac{3}{4},\ \cdots,\ 1+(-1)^n\frac{n}{n+1},\ \cdots$

2. 수렬의 극한계산

수렬의 극한에 관한 다음 기본성질을 쓰면 수렬의 극한계산을 쉽게 할수 있다.

수렬의 극한의 기본성질

수렬 (a_n), (b_n)이 수렴하면

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$ (c는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$

성질 (2),(3)은 3개이상의 수렬에 대해서도 성립한다.

$$(2)' \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n \pm \cdots \pm \mathrm{L}_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \pm \cdots \pm \lim_{n\to\infty} \mathrm{L}_n$$

$$(3)' \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n \cdots \mathrm{L}_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n \cdots \lim_{n\to\infty} \mathrm{L}_n$$

례 1 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(5+\dfrac{1}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 5 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 5+0\cdot 0 = 5$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\cdot\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n})$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} 2 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$

$$= (1+0)(2+2\cdot 0) = 2$$

례 2 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2+2n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)} = \frac{2}{3}$$

문 제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2}$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^2}{n^2}$

2. 다음 극한을 계산하여라.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n(n+1)}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n^2+1}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+2}$

례 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$을 구하여라.

(풀이) 이 경우에는 차의 극한에 관한 성질을 직접 쓸수 없으므로 다음과 같이 고쳐서 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

례 4 $\lim_{n\to\infty} q^n$ 을 구하여라.

(풀이) 1) $|q|<1$일 때

$|q|>|q|^2>|q|^3>\cdots>|q|^n>\cdots$ 이고 n이 끝없이 커질 때 $|q|^n$ 은 얼마든지 0에 가까와간다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0$$

2) $|q|>1$일 때

$$|q|<|q|^2<|q|^3<\cdots<|q|^n<\cdots$$

이고 n 이 끝없이 커질 때 $|q|^n$ 은 얼마든지 커진다. 그러므로 (q^n)은 무한대로 발산한다. 이것을 다음과 같이 쓰기로 한다.

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\infty$$

3) q=1 일 때

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\lim_{n\to\infty} 1^n=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

4) q=-1 일 때

$q^n=(-1)^n$ 이므로 (q^n)은 진동한다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0, & |q|<1 \text{ 일 때}\\ 1, & q=1 \text{ 일 때}\\ \text{발산}(\infty), & |q|>1 \text{ 일 때}\\ \text{발산(진동)}, & q=-1\text{일 때}\end{cases}$$

문 제

1. 다음 극한을 계산하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ 2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+5}-n\right)$

2. 다음 극한을 계산하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2-2^n}{2+5^n}$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-1}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{1-4^n}$ 4) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-\tan\frac{2\pi}{n}\right]$

3. 무한같은비합렬

첫째 마디가 $a(a\neq 0)$, 공통비가 $q(q\neq 0)$인 무한같은비수렬

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots,\ aq^{n-1},\ \cdots$$

에 대하여 매개 마디를 더하기기호로 이어놓은

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

을 **무한같은비합렬**이라고 부른다.

그리고 처음 n개의 마디의 합

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$

을 n**째부분합**이라고 부른다.

S_n에서 n=1, 2, 3, … 라고 하면 수렬 (S_n)이 얻어진다.

부분합들로 이루어진 수렬 (S_n)이 수렴하면 무한같은비합렬은 **수렴한다**고 말하고 극한

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

를 그 **합**이라고 부른다.

그리고 이것을 다음과 같이 표시한다.

$$S=a+aq+\cdots+aq^{n-1}+\cdots \quad 또는 \quad S=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$$

같은비수렬의 합의 공식을 쓰면

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}q^n\,(q\neq 1),\ S_n=na(q=1)$$

그런데 $|q|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}q^n=0$

$|q|\geq 1$일 때 (q^n)은 발산하므로

$$|q|<1 \text{일 때} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

$$|q|\geq 1 \text{일 때} \quad S_n \text{은 발산}$$

이리하여 무한같은비합렬은 $|q|<1$일 때만 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-q}$와 같다. $|q|\geq 1$일 때는 발산한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q|<1 \\ \text{발산}, & |q|\geq 1 \end{cases}$$

례 1 다음 무한같은비합렬의 합을 구하여라.

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ 2) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$

(풀이) 1) $a=1$, $q=\frac{1}{2}$이므로

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

2) $a=1$, $q=-\frac{1}{3}$이므로

$$S=\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

무한같은비합렬의 합공식을 쓰면 순환소수를 쉽게 분수로 고칠수 있다.

례 2 다음 순환소수를 분수로 고쳐라.

1) 0.(7) 2) 0.4(23)

(풀이) 1) $0.(7)=0.777\cdots=0.7+0.07+0.007+\cdots=\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots$

이것은

$$a=\frac{7}{10}, \quad q=\frac{1}{10}$$

인 무한같은비합렬의 합이다. 결과

$$0.(7)=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}$$

2) $0.4(23)=0.4+0.023+0.00023+\cdots=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\cdots$

둘째 마디로부터 $a=\frac{23}{10^3}$, $q=\frac{1}{10^2}$ 인 무한같은비합렬을 이룬다.

따라서

$$0.4(23)=\frac{4}{10}+\frac{\frac{23}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{419}{990}$$

문 제

1. 다음 합을 구하여라.

1) $\sum_{k=0}^{\infty}0.2^k$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{10^n}$

2. 다음 순환소수를 분수로 고쳐라.

1) -3.(27) 2) 1.2(12)

련 습 문 제

1. 다음 수렬가운데서 수렴하는 수렬을 갈라내고 그 극한을 구하여라.

1) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \cdots,\ \frac{1}{n^2},\ \cdots$ 2) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\cdots,\ \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ \cdots$

3) $\frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \ -\frac{n+1}{n},\ \cdots$

2. 다음 수렬가운데서 수렴하는 수렬을 갈라내고 그 극한을 구하여라.

1) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ 2) $\left(\frac{n}{1+n^2}\right)$ 3) $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ 4) $\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\right)$

3. 다음 조건을 만족시키는 수렬의 실례를 하나씩 들어라.

1) $a_n < b_n < 1$ 이면서 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ 인 수렬 (a_n) 과 (b_n)

2) (a_n) 은 발산하지만 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2) = 1$ 인 수렬 (a_n)

4. 다음 극한계산에서 무엇이 잘못되였는가? 그 까닭을 말하여라.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 3n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 - \lim\limits_{n\to\infty} 3n = 0$　　2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+2^n}{3^n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(4+2^n)}{\lim\limits_{n\to\infty}3^n} = \dfrac{\infty}{\infty} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n} = 0+0+\cdots+1 = 1$

5. 다음의 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{-3n^2+1}$　　2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{2+\sqrt{n}}$　　3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^3-2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+3^n}{2^{2n}}$　　5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$　　6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-1}{a-1}(a>0,\ a\neq 1)$　　8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$　　10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

6. 다음 합을 구하여라.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5\cdot 10^{-n}$

3) $1+x+x^2+x^3+\cdots\quad(|x|<1)$　　4) $1-x+x^2-x^3+\cdots\quad(|x|<1)$

7. 다음 합을 계산하여라.

1) $(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)+(5\sqrt{2}-7)+\cdots$

2) $(\sqrt{3}-1)+(2-\sqrt{3})+\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}+\cdots$

3) $(0.2+0.035)+(0.002+0.00035)+\cdots$

8. 점화식으로 주어진 다음 수렬의 극한을 구하여라.

1) $a_1=4,\ a_{n+1}=2+\dfrac{1}{3}a_n$　　2) $a_1=5,\ a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$　　3) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=(-\dfrac{1}{2})^n$

9. 한 변이 a인 바른4각형의 네 변들의 가운데점을 맺어서 새로운 바른4각형을 얻고 또 이 바른4각형의 네 변의 가운데점을 맺는다. 이러한 과정을 계속해나갈 때 얻어지는 바른4각형들의 면적의 합, 둘레의 합을 구하여라.(그림 2-1)

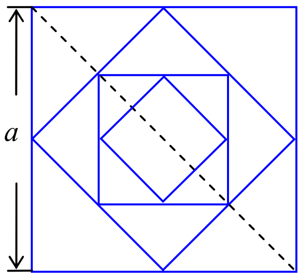


그림 2-1

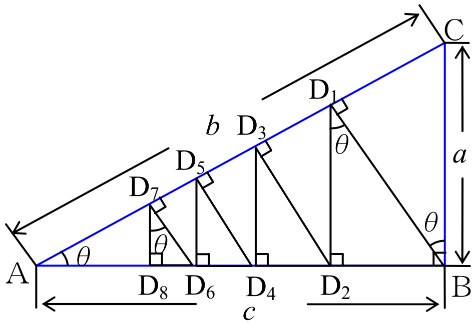


그림 2-2

10. 직3각형 ABC의 직각의 정점 B에서 빗변 AC에 내린 수직선의 밑점을 D_1, D_1에서 변 AB에 내린 수직선의 밑점을 D_2, D_2에서 AC에 내린 수직선의 밑점을 D_3이라고 한다. 이런 과정을 끝없이 계속해나갈 때 합

$$BD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \cdots$$

을 구하여라. 여기서 AB=c, BC=a, AC=b이다.(그림 2-2)

11. 다음 순환소수를 분수로 고쳐라.

1) 1.(7)　　2) 0.(234)　　3) 0.4(12)　　4) 3.42(23)

제 2 절. 함수의 극한과 련속

1. 함수의 극한

과학과 기술에서는 수렬의 경우와 비슷하게 변수 x가 일정한 값에 끝없이 가까와갈 때 함수값의 변화상태를 고찰할 경우가 많다.

례 1 일정한 압력밑에서 물체의 온도를 점점 낮추어 그것이 -273°C로 가까와가면 물체의 분자들의 운동은 정지상태에 가까와간다.

례 2 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 x=1에서 뜻을 가지지 않지만 1이 아닌 모든 x의 값에서는

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

이므로 변수 x가 1에 끝없이 가까와갈 때 $f(x)$는 얼마든지 2에 가까와간다.(그림 2-3)

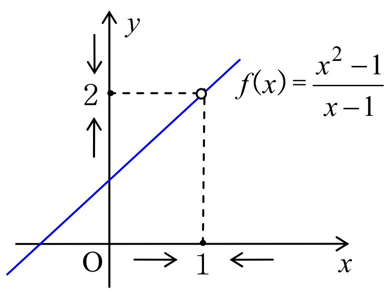


그림 2-3

변수 x가 1에 가까와가는 방법에는 여러가지가 있다. 1보다 큰 값을 잡으면서 갈수도 있고 작은 값을 잡으면서 갈수도 있다. 또한 1보다 큰 값과 작은 값을 차례로 잡으면서 갈수도 있다. 아무런 방법으로나 x가 1에 가까와가도 함수는 얼마든지 2에 가까와간다. 이때 수렬의 경우와 비슷하게 함수 $f(x)$는 x가 1에 끊임없이 가까와갈 때 $f(x)$는 2에 《수렴한다》고 말하게 된다.

함수 $f(x)$가 점 a의 충분히 가까운데서 늘 뜻을 가진다고 하자.

함수 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$에서 변수 $\boldsymbol{x}$가 늘 $\boldsymbol{x \neq a}$이면서 아무런 방법으로나 수 $\boldsymbol{a}$에 끝없이 가까와가도 함수 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$의 값이 일정한 수 A로 얼마든지 가까와가면 함수 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$는 $\boldsymbol{x}$가 $\boldsymbol{a}$로 가까와갈 때 수 A로 수렴한다고 말하고 다음과 같이 표시한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{A} \qquad\qquad f(x) \to \mathrm{A}\,(x \to a)$$

그리고 수 A를 $\boldsymbol{x \to a}$일 때 $f(x)$의 극한이라고 부른다.

례 1, 2를 극한기호를 써서 표시하면

$$\lim_{T \to -273} v = 0, \qquad\qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$x \to a$일 때 함수 $f(x)$가 극한을 안가지면 함수 $f(x)$는 $x \to a$일 때 발산한다고 말한다.

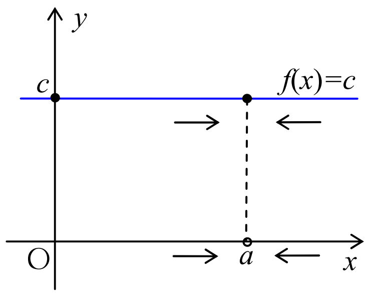


그림 2-4

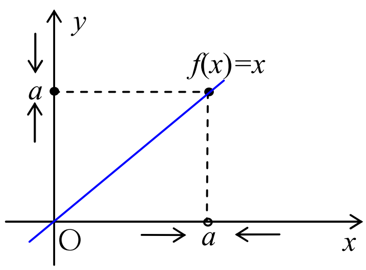


그림 2-5

그림에서 쉽게 알수 있는바와 같이

$$\lim_{x \to a} c = c \ (\ c\text{는 상수})$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

문 제

1. 다음 함수의 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 2}(5-x)$　　2) $\lim_{x\to -1}\dfrac{5x+1}{3x}$　　3) $\lim_{x\to -2}0.2x$　　4) $\lim_{x\to 1}\cos\dfrac{3}{2}\pi x$

2. 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ 에서 변수 x가 $x\neq -1$ 이면서 -1에 가까와갈 때 함수값의 변화를 살펴보아라. 함수값이 일정한 수로 《수렴한다》고 말할수 있는가?

3. 다음 극한이 있는가?

1) $\lim_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2}$　　2) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x+1}{x^2-9}$　　3) $\lim_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$　　4) $\lim_{x\to a}\cos\dfrac{1}{x-a}$

4. 그림 2-6에서와 같이 주어진 함수의 점 a에서의 함수의 극한을 정하여라. 극한을 안가지면 왜 안가지는가를 말하여라.

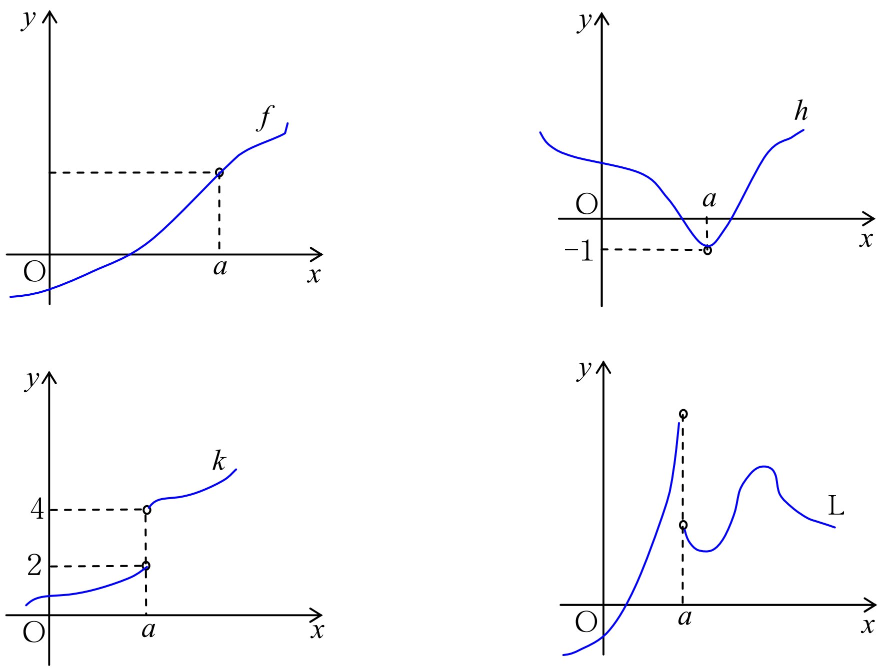


그림 2-6

(지시) $\lim_{\substack{x\to a\\(x<a)}} f(x)$ (왼쪽극한), $\lim_{\substack{x\to a\\(x>a)}} f(x)$ (오른쪽극한)이 있는가를 밝히고 그것이 일치하는가를 따지면 된다.

2. 함수의 극한계산

함수의 극한에 관한 다음 기본산법성질을 쓰면 극한계산을 쉽게 할수 있다.

함수의 극한의 기본성질

$x \to a$일 때 $f(x)$, $g(x)$가 수렴하면

(1) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (c는 상수)

(2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $\quad\left(g(x) \neq 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$

성질 (2), (3)은 3개이상의 함수에 대해서도 성립한다.

(2)′ $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x) \pm \cdots \pm \mathrm{L}(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) \pm \cdots \pm \lim\limits_{x\to a} \mathrm{L}(x)$

(3)′ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)\cdot \cdots \cdot \mathrm{L}(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \cdots \cdot \lim\limits_{x\to a} \mathrm{L}(x)$

례 1 1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2) = \lim\limits_{x\to 1} 3x + \lim\limits_{x\to 1} 2 = 3\lim\limits_{x\to 1} x + 2 = 3\cdot 1 + 2 = 5$

2) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = \lim\limits_{x\to 2} x\cdot x = \lim\limits_{x\to 2} x \cdot \lim\limits_{x\to 2} x = \left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2 = 2^2 = 4$

일반적으로

$$\lim_{x\to a} x^n = \left(\lim_{x\to a} x\right)^n$$

례 2 1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+3x+5\right) = 2\lim\limits_{x\to 2} x^2 + 3\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 5 = 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 5 = 19$

2) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+1)(x^2-2x+1) = \lim\limits_{x\to -2}(3x+1)\cdot \lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+1)$

$= [3\cdot(-2)+1]\cdot[(-2)^2 - 2(-2)+1] = -5\cdot 9 = -45$

$f(x)$가 x에 관한 옹근식으로 표시된 함수이면

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

례 3 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+2}{3x^2-1}$　　　　2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

(풀이) 1) $\lim_{x\to 1}(x+2)=1+2=3$

$\lim_{x\to 1}(3x^2-1)=3\cdot 1^2-1=2\neq 0$ 이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{3x^2-1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(3x^2-1)}=\frac{3}{2}$$

2) $\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)=0,\quad \lim_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0$

이므로 성질 (4)를 직접 쓸수 없다.

이 경우에 $x-1\neq 0$이므로 다음과 같이 고쳐서 계산한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+3}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(x+3)}=\frac{3}{4}$$

례 4 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$을 구하여라.

(풀이) 이 경우에는 분자와 분모의 극한이 다 0이므로 성질 (4)를 직접 쓸수 없다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

례 5 $\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$을 구하여라.

(풀이) $x\to 0$일 때 $\sin\dfrac{1}{x}$이 극한을 안가지므로 함수의 극한에 관한 성질을 쓸수 없다.

이 경우에는 $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$이라는것을 고려하여 다음과 같이 계산한다.

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$$

$$-x \to 0,\ x \to 0(x \to 0)$$

이므로

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

문 제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 1)$

2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(x+2)^2$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-2}$

4) $\lim_{x\to -3}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$

2. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

3) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

5) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

3. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 1} 2(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$

2) $\lim_{x\to 4} x^2 \lg(x-3)$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1}\cos\frac{1}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{4-x}}{2+\sin\frac{1}{x}}$

4. 다음 함수의 극한이 있는가?

1) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

2) $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$

3) $\lim_{x\to 1}\arctan\frac{1}{1-x}$

3. 두 특수극한

1) $x \to 0$ 일 때 $\frac{\sin x}{x}$의 극한

그림 2-7과 그림 2-8에서 쉽게 알수 있는바와 같이

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

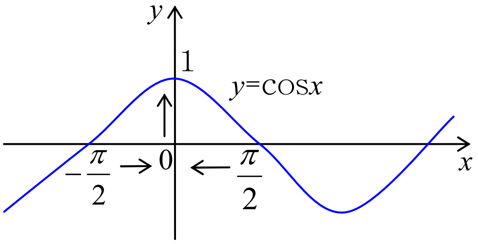


그림 2-7

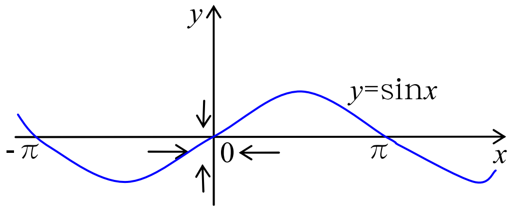


그림 2-8

$x \to 0$일 때 $\frac{\sin x}{x}$의 분자와 분모의 극한이 다 0이므로 상의 극한에 관한 성질을 쓸수 없다. 그러므로 다음과 같은 방법으로 계산한다.

먼저 $0<x<\frac{\pi}{2}$이면서 $x \to 0$인 경우를 보자. 단위원을 그리고 중심각이 x인 활등 $\overset{\frown}{AB}$를 잡자.

그림 2-9에서 △AOB, 부채형 OAB, △AOT의 면적을 비교하면

$$S_{\Delta AOB} < S_{부채형 OAB} < S_{\Delta AOT}$$

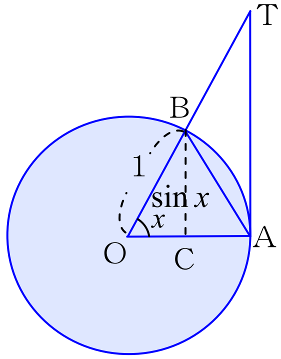


그림 2-9

그런데 CB=sin$x$, AT=tan$x$, $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\sin x$,

$S_{부채형 OAB}=\frac{1}{2}x$, $S_{\Delta AOT}=\frac{1}{2}\tan x$이므로

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

$\sin x > 0\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$이므로

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

그런데 $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

이번에는 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 이면서 $x\to 0$ 인 경우를 보자.

이 경우에 $x=-x_1(x_1>0)$ 이라고 놓으면

$$x\to 0\left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)\Leftrightarrow x_1\to 0\left(0<x_1<\frac{\pi}{2}\right)$$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x_1\to 0}\frac{\sin(-x_1)}{-x_1}=\lim_{x_1\to 0}\frac{-\sin x_1}{-x_1}=\lim_{x_1\to 0}\frac{\sin x_1}{x_1}=1$$

이리하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

안갈기식 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ 로부터

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

이라는것도 곧 알수 있다.

이 극한들을 써서 삼각함수가 들어있는 일련의 함수의 극한을 쉽게 구할수 있다.

례 1 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3\cdot 1=3(t=3x)$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)=\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{2}$

례 2 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

례 3 $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ 를 구하여라.

(풀이) $\arcsin x=t$ 라고 놓으면 $x=\sin t$ 이고

$x\to 0$ 일 때 $t\to 0$ 따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

문 제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 3x}$ 3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

2. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-6x)}{5x}$ 3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\tan x$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1+x)}{1+x}=1$ 이 옳은가?

2) $x\to\infty$일 때 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$의 극한

변수 x의 값이 끝없이 커지거나 작아질 때 이것을 $x\to\infty$로 표시하기로 한다.

함수 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$의 값들은 다음 표에서와 같이 변한다.

x	$(1+\frac{1}{x})^x$	x	$(1+\frac{1}{x})^x$
0.1	1.009 6		
0.2	1.431 0		
0.5	1.732 0		
1	2.000 0		
2	2.250 0	-2	4.000 0
10	2.593 7	-10	2.868 0
100	2.704 8	-100	2.732 0
1 000	2.716 9	-1 000	2.719 5
2 000	2.717 6	-2 000	2.718 9
3 000	2.717 8	-3 000	2.718 7
5 000	2.718 0	-5 000	2.718 5
…	…	…	…

표를 보면 $x \to \infty$ 일 때 함수 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 의 값이 일정한 수 2.71… 에로 얼마든지 가까와간다는것을 알수 있다.

이 극한을 글자 e 로 표시한다. 이때

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

이 극한 e를 우의 표에서와 같이 더 큰 값을 주면서 보다 정확히 계산해나가면 다음과 같다.

$$e=2.718281828\cdots$$

수 e는 수학자체에서뿐아니라 과학과 기술에서 널이 쓰이는 수의 하나로서 무리수이다.

우의 극한을 써서 일련의 극한을 쉽게 계산할수 있다.

례 4 1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \left(t=\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}$

3) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2 = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^2 = e^2 \, (t=2x)$

수 e 를 밑수로 하는 로그 $\log_e x$ 을 **자연로그**라고 부르고 $\ln x$ 로 표시한다.

로그계산에서는 10을 밑수로 하는 상용로그가 쓰이지만 과학과 기술에서 리론을 전개해나가는데서는 자연로그가 널리 쓰인다.

자연로그와 상용로그사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\ln \mathrm{N} = \lg \mathrm{N} \cdot \frac{1}{\lg e}$$

또는

$$\lg \mathrm{N} = \ln \mathrm{N} \cdot \lg e$$

문 제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$ 2) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$

2. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ 2) $\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$

4. 함수의 련속성

함수의 개념은 함수의 극한개념과 밀접한 관계를 가진다.

함수 $f(x)$가 점 a와 이 점의 가까이에서 뜻을 가진다고 하자.

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

일 때 함수 $f(x)$는 점 $x=a$ 에서 련속이라고 말한다.

점 a에서 함수 $f(x)$ 가 련속이라는것은 변수 x가 점 a로 가까이 갈 때 함수값 $f(x)$가 바로 점 a에서의 함수값 $f(a)$에 수렴한다는것을 의미한다.

이것을 다른 각도에서 살펴보자.

변수 x가 점 a와 다른 점 x를 잡았을 때 차 $x-a$를 점 a에서 변수 x의 증분이라고 부르고 Δx (《델타 x》)로 표시한다.

$$\Delta x = x-a(\Delta x\neq 0)$$

이때 $x=a+\Delta x$

또한 변수 x의 증분 Δx에 대응하는 함수값 $f(x)$의 변화량 $f(a+\Delta x)-f(a)$을 점 a 에서의 함수 $f(x)$의 증분이라고 부르고 Δy (《델타 y》)로 표시한다.

$$\Delta y = f(a+\Delta x)-f(a)$$

그런데

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=0\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(a+\Delta x)-f(a)]=0$$

즉

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

이것은 점 a에서 변수 x가 조금 변하면 그에 따라 함수값 $f(x)$도 조금 변한다는 것을 보여준다.

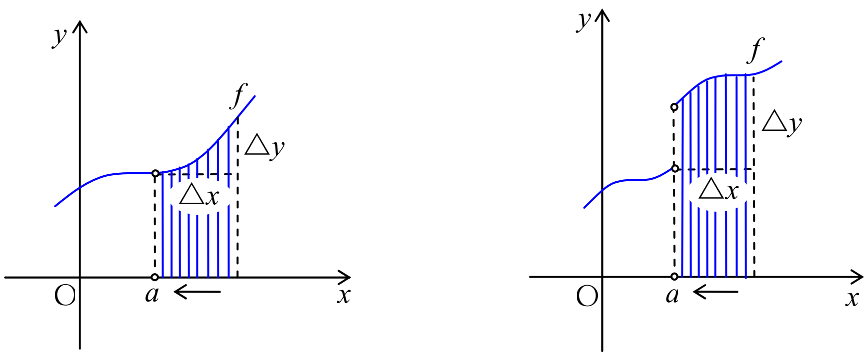


그림 2-10

그림 2-10에서 볼수 있는바와 같이 그라프가 끊어지지 않고 이어져있는 점에서는 Δx를 령으로 보낼 때 함수의 증분 Δy가 령으로 수렴하지만 끊어져 떨어진 점에서는 령으로 수렴하지 않는다. 이리하여 함수가 주어진 점에서 련속인가 아닌가 하는것은 주어진 함수의 그라프가 직관적으로 그 점에서 끊어지지 않고 이어져있는가 끊어져 떨어져있는가 하는것을 나타낸다.

례 1 $f(x) = 3x^2 + x$는 점 $x=3$에서 련속이다.

사실 $f(3) = 3 \cdot 3^2 + 3 = 30$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(3x^2 + x) = 3 \cdot 3^2 + 3 = 30 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

례 2 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$은 극한 $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$를 가지나 점 $x=1$에서 뜻을 안가진다. 그러나 그 그라프는 점 M(1, 2)에서 틈이 생겨 끊어져있다. 그러므로 $f(x)$는 점 $x=1$에서 련속이 아니다.(그림 2-11)

례 3 $g(x)=\dfrac{3}{x-2}$ 은 점 $x=2$에서 뜻을 가지지 않을뿐아니라 $x\to 2$일 때 극한도 가지지 않는다. 그러나 그 그라프는 점 $x=2$에서 끊어져있다. 그러므로 $g(x)$는 점 $x=2$에서 련속이 아니다.(그림 2-12)

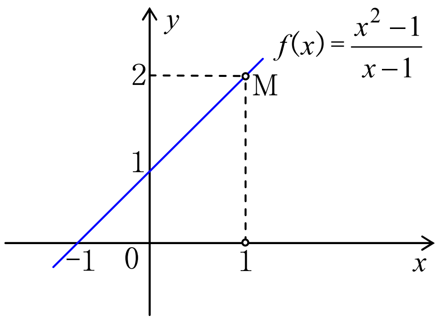


그림 2-11

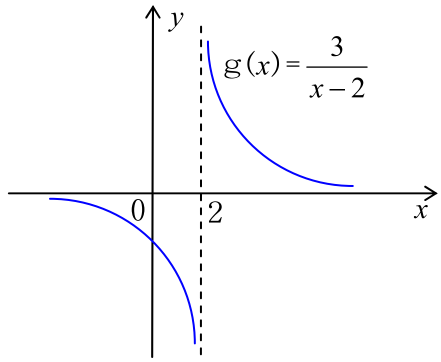


그림 2-12

함수 $f(x)$가 점 $x=a$에서 련속이 아닐 때 점 a를 함수 f의 **불련속점**이라고 부른다.

원래 함수 $f(x)$가 점 a에서 련속이라고 하면 련속의 정의자체에서 곧 알수 있는 바와 같이 점 a는 이 함수의 뜻구역에 들어야 한다. 그러나 우의 례 2, 3에서 보는 바와 같이 $x=1$, $x=2$의 충분한 가까이에서 함수가 정의되여있고 이 점들에서 함수가 틈이 생겨 끊어져있거나 떨어져있다면 비록 이 점들에서 함수가 정의되여있지 않아도 이 점들을 불련속점으로 보는것이 자연스럽다.

앞으로 함수의 불련속점에 대해서 생각할 때는 비록 뜻구역에 안 들어도 우에서와 같은 점을 생각하기로 한다.

함수 $f(x)$가 주어진 구간의 매개 점에서 련속이면 함수 $f(x)$는 그 **구간에서 련속**이라고 말한다.

함수 $f(x)$가 닫긴구간 $[a,\ b]$에서 련속이라고 할 때 왼쪽끝점 a에서는

$$\lim_{\substack{x\to a\\(a<x)}} f(x)=f(a)\ \text{(오른쪽련속)}$$

오른쪽끝점 b에서는

$$\lim_{\substack{x\to b\\(x<b)}} f(x)=f(b)\ \text{(왼쪽련속)}$$

에서 그 련속성을 리해한다.

우리가 늘 다루고있는 함수들인

$$y=x^n,\quad y=\sin x\ ,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,\quad y=a^x,\quad y=\log_a x$$

등은 다 그것들이 정의된 구간에서 련속이다.

이것들의 그라프를 보면 직관적으로 그것이 련속이라는것을 곧 알수 있다.

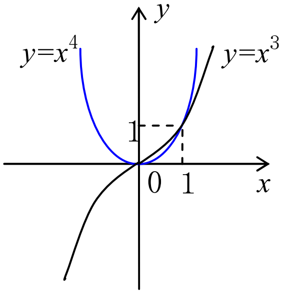


그림 2-13

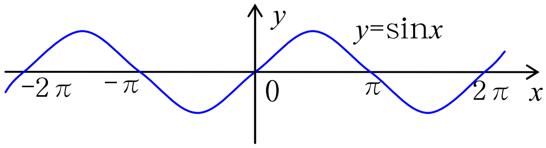


그림 2-14

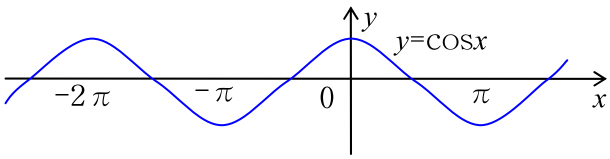


그림 2-15

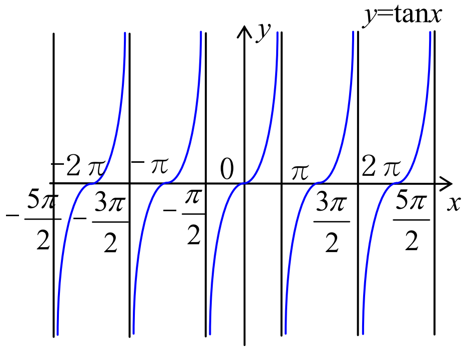


그림 2-16

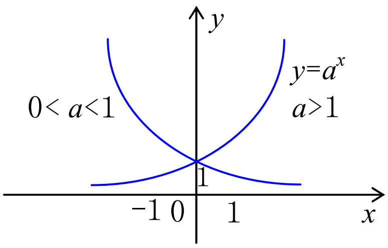


그림 2-17

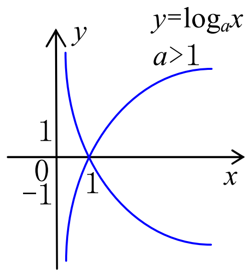


그림 2-18

문 제

1. 독립변수의 증분은 늘 령이 아니다. 그러나 함수의 증분은 령이 될수 있다. 그러한 실례를 들어보아라.

2. $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ 와 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 는 어떻게 다른가?

3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 은 점 x=0 을 떼놓은 모든 점에서 련속이다. 그것을 밝히여라.

4. 다음 함수들은 어데서 련속이고 어데서 불련속인가?

1) $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+1}$ 2) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

3) $y=\cot x$ 4) $y=\dfrac{|x|}{x}$

련 습 문 제

1. 다음 함수들의 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{x\to-3} 3x^2(x-2)$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{3-x}$ 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+3}+1}$

2. 다음 함수들의 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan\dfrac{x}{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$ 4) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}$

5) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta-\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

3. 다음 함수들의 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-2x^2+x}{5x}$

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$ 4) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(y+h)^2-y^2}{h}$

5） $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$　　　6） $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

4. 다음 함수들의 극한을 구하여라.

1） $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$　　2） $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x+1}$　　3） $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{3x}$

4） $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$　　5） $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

5. $M_o(a,0)$ ($a>0$)은 일정한 점이고 점 $M(x,\ y)$는 1사분구에서 $\angle MM_oO=2\angle MOM_o$의 관계를 보존하면서 움직인다. $x,\ y$를 $\angle MOM_o=\theta$의 함수로 표시하여라. $\theta\to 0$일 때 점 M은 어떤 점으로 가까와가는가?

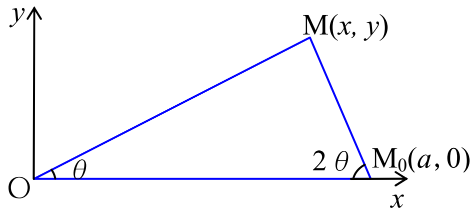


그림 2-19

6. 갈기식이 성립하도록 a와 b를 정하여라.

1） $\lim_{x\to 1}\dfrac{ax^2+x+b}{x-1}=3$　　　2） $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-ax+8}{x^2-(2+b)x+2b}=\dfrac{1}{5}$

7. 점 x=1에서의 증분이 Δx =0.01, Δx =-0.01일 때 함수 $y=2x^2-x$의 증분 Δy를 각각 구하여라.

8. 점 x=-2에서의 증분이 Δx =0.03, Δx =0.002일 때 함수 $y=-3x^2+1$의 증분 Δy를 각각 구하여라.

9. 다음 함수 f에 대해서

$$f(x_o+\Delta x),\ f(x_o+\Delta x)-f(x_o),\ \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

을 각각 구하여라.

1） $f(x)=x^2$　　　2） $f(x)=ax+b$

3） $f(x)=ax^2+bx+c$　　　4） $f(x)=x^3-x$

10. 다음 함수는 어데서 련속이고 어데서 불련속인가?

1) $y=\frac{2x-1}{2x^2+3x+1}$ 2) $y=x+\frac{1}{x}$

3) $y=\cos(x+2)$ 4) $y=\frac{1}{x^2-1}$

11. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<-1 \\ k, & x=-1 \\ x^2+3, & x>-1 \end{cases}$$

의 련속구간을 말하여라.

탐 구

1. 모든 홀수차방정식은 적어도 하나의 실수풀이를 가진다는것을 증명하여라.
2. 모든 짝수차방정식은 적어도 두개의 실수풀이를 가지든지 아니면 실수풀이를 가지지 않는다는것을 증명하여라.

제 3 절. 도함수

1. 변화률

도함수는 력학적으로는 부등속운동을 하는 물체의 어떤 순간에서의 속도를 정하는 문제와 기하학적으로는 임의의 모양의 곡선에 그은 접선의 방향결수를 정하는 문제를 푸는 과정에 이끌어졌다.

이제 이 두 문제를 푸는 방법을 생각해보자.

순간속도를 정하는 문제

물체의 부등속운동에서는 매 순간마다 그 속도가 다르다.

물체가 자유락하할 때 매 순간에서의 속도를 정하는 문제를 놓고 생각해보자.

진공속에서 물체가 자유락하할 때 t시간동안에 물체가 떨어지는 거리를 s라고 하면

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

어떤 순간 t에서부터 Δt 만 한 시간이 지나는 동안 물체가 떨어진 거리를 Δs 라고 하면

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

그러므로 t 와 $t+\Delta t$ 사이에서의 물체의 평균속도 $V_{\Delta t}$ 는 다음과 같다.

$$V_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t} = g(t + \frac{1}{2}\Delta t)$$

물체가 등속도직선운동을 한다고 하면 $V_{\Delta t}$ 가 바로 물체의 속도로 될것이다.

그러나 자유락하하는 물체의 운동은 등속도운동이 아니므로 순간마다 속도가 달라진다. 그러므로 평균속도 $V_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 는 순간 t와 Δt 에 따라 달라진다.

그러나 Δt 를 작게 잡으면 잡을수록 평균속도 $V_{\Delta t}$ 는 순간 t에서의 떨어지는 물체의 속도를 보다 가깝게 표시한다고 볼수 있다.

이리하여 $\Delta t \to 0$ 일 때의 평균속도의 극한

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} g\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) = gt$$

를 떨어지는 물체의 순간 t 에서의 속도(순간속도)로 정할수 있다.

접선의 방향결수를 정하는 문제

함수 f의 그라프 L의 점 M에서 그은 접선의 방향결수를 정하는 문제를 생각해보자.

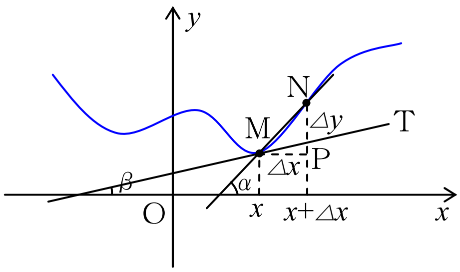


그림 2-20

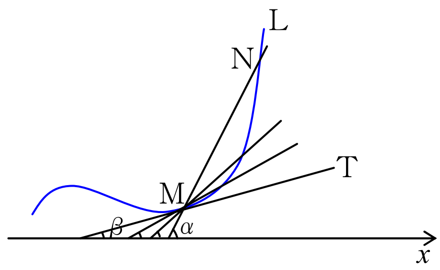


그림 2-21

그림에서 쉽게 알수 있는바와 같이

$$MP = \Delta x$$

$$NP = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

이때 가름선 MN의 방향결수는

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

그런데 점 N이 곡선 L을 따라 점 M에 끝없이 가까와가면 $\Delta x\to 0$ 으로 되고 가름선 MN은 그 방향을 점차로 바꾸면서 직선 MT에 얼마든지 가까와간다.

이 극한위치에 있는 직선 MT를 점 M에서 곡선 L에 그은 **접선**이라고 부르고 점 M을 **접점**이라고 부른다.

가름선 MN 이 접선 MT 로 가까와갈 때 $\alpha\to\beta$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{\mathrm{N}\to\mathrm{M}}\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\alpha\to\beta}\tan\alpha=\tan\beta$

그런데 $\tan\beta$ 는 접선 MT 의 방향결수이다.

이리하여 접선 MT 의 방향결수 $\tan\beta$ 는 다음 극한으로 정해진다.

$$\tan\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

우에서 본 순간속도를 정하는 문제나 접선의 방향결수를 정하는 문제는 비록 그것들이 서로 다른 내용의 문제이기는 하지만 수학적인 내용으로 보면 독립변수의 증분을 령으로 보낼 때 함수의 증분과 독립변수의 증분과의 비의 극한으로 정한다는 의미에서는 같다. 이밖에도 도체에 흐르는 전류의 세기를 정하는 문제, 막대기에 질량이 퍼져있을 때 그 밀도를 구하는 문제 등 과학과 기술에서 다루는 량들가운데는 우에서와 같은 모양의 극한으로 정해지는것들이 많다.

함수 $y=f(x)$ 가 주어졌다고 하자.

점 a에서 독립변수의 증분 Δx 를 잡고 이에 대응하는 함수의 증분을 Δy 라고 하면

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$$

이때 비

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 Δx 에 따라 달라진다. 이 비는 a와 $a+\Delta x$ 사이에서의 함수 f 의 평균변화률을 나타낸다.

극한

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이 있으면 함수 f는 점 a에서 미분가능하다고 말한다.

그리고 이 극한을 점 a에서의 f의 변화률 또는 미분결수라고 부르고 $f'(a)$로 표시한다. 즉

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$f'(a)$ 를

$$y'(a),\quad \frac{df(a)}{dx},\quad \frac{dy(a)}{dx}$$

등으로도 표시한다.

례 함수 $y = x^2 + x$ 의 점 x=2 에서의 변화률을 구하여라.

(풀이) 점 x=2 에서 변수 x 의 증분을 $\triangle x$ 로 표시하므로

$$\triangle y = f(2+\Delta x) - f(2) = \left[(2+\Delta x)^2 + (2+\Delta x)\right] - \left[2^2 + 2\right] = 5\Delta x + (\Delta x)^2$$

2 와 2+$\triangle x$ 사이에서 함수의 평균변화률은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 5 + \Delta x$$

$\triangle x \to 0$ 일 때 이것의 극한을 구하면

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(5+\Delta x) = 5$$

따라서 함수 $y = x^2 + x$ 는 점 x=2 에서 미분가능하고 그 변화률은

$$f'(2) = 5$$

문 제

1. 함수 $f(x) = x^3 - 2x$ 에서 변수 x가 −3에서 1까지 변할 때 이 함수의 평균변화률을 구하여라. 또한 a에서 b까지 변할 때 이 함수의 평균변화률을 구하여라.

2. 어떤 물체가 $S = t^2 - t + 1$ 이라는 법칙에 따라 직선운동을 한다. 시간 t가 다음과 같이 변할 때 그 평균속도를 구하여라.

   1) 3에서 3.1까지　　2) 3에서 3.01까지

   3) 2.99에서 3까지　　4) 3에서 3+h까지

   또한 운동이 시작된지 3 초후의 물체의 속도를 구하여라.

3. 함수 $f(x) = 3x - x^2$ 의 점 x=−2, x=0, x=3 에서의 변화률을 각각 구하여라.

2. 도함수

함수 f가 구간 $(a,\ b)$의 매개 점에서 미분가능하면 f는 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다고 말한다.

함수 f 가 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 $(a,\ b)$의 매 점 x에는 변화률(미분결수)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

가 대응한다. 즉

$$(a,\ b) \ni x \to f'(x) \in \mathrm{R}$$

이것은 $(a,\ b)$를 뜻구역으로 하고 $f(x)$의 변화률들의 모임을 값구역으로 하는 하나의 새로운 함수가 정해졌다는것을 의미한다.

이 새로운 함수를 f'로 표시하고 f로부터 이끌어졌다는 의미에서 함수 f의 도함수라고 부른다. 즉

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

도함수 f'를

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

등으로도 표시한다.

도함수의 의미로부터 앞에서 본 순간속도와 접선의 방향결수는 각각

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\tan\beta = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

이것은 도함수(변화률 또는 미분결수)가 력학적으로는 순간속도를 의미하며 그라프에서는 접선의 방향결수를 의미한다는것을 보여준다.

도함수값 $f'(x)$는 점 x에 대응하는 함수 f의 그라프의 점 $\mathrm{M}(x,\ f(x))$에서 이 그라프에 그은 접선의 방향수와 같다는것을 앞에서 보았다.

그러므로 미분가능한 점에서는 함수의 그라프에 y축에 평행이 아닌 꼭 하나의 접선을 그을수 있다.

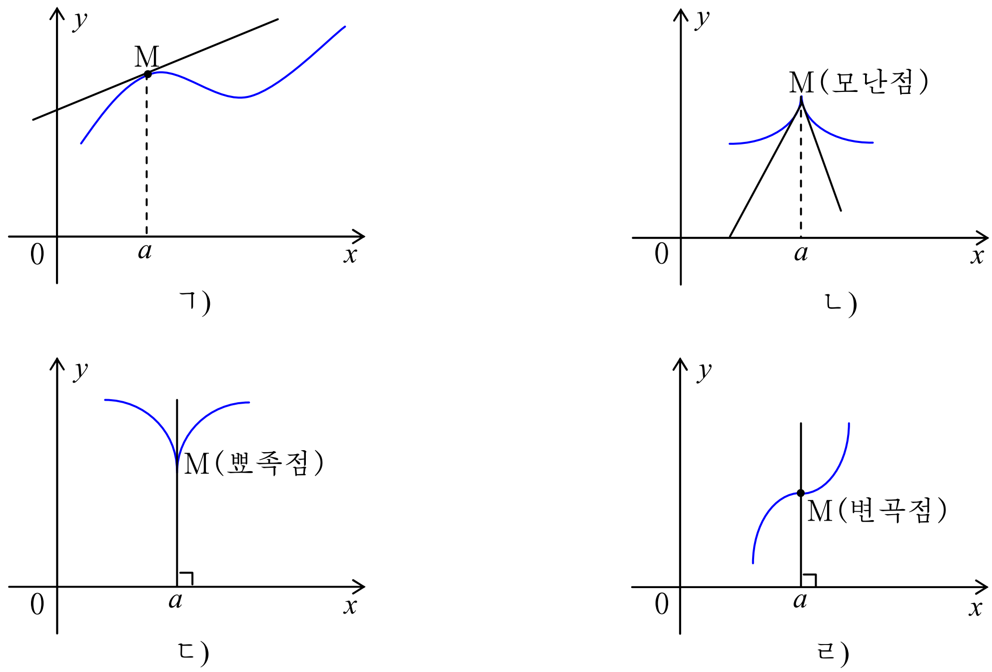


그림 2-22

그림에서 ㄱ)은 점 a에서 함수가 미분가능한 경우이고 ㄴ), ㄷ), ㄹ)은 점 a에서 련속이지만 미분가능하지 않는 경우이다.

ㄴ)에서는 점 M에서 그라프가 모가 나서 두개의 접선이 그어졌다.(모난점) ㄷ), ㄹ)에서는 y축에 평행인 접선이 그어졌다.

그런데 ㄷ)에서는 점 M이 그라프의 뾰족한 점으로 되여있고(뾰족점), ㄹ)에서는 곡선이 점 M에서 이어지면서 접선의 량쪽에 놓여있다.(변곡점)

우의 그림은 함수 f가 점 a에서 미분가능하면 f는 점 a에서 련속이지만 이것의 거꿀은 일반적으로 성립하지 않는다는것을 보여준다.

문 제

1. 다음 함수의 도함수를 구하고 지적된 값을 구하여라.

   1) $y = x^2$, $f'(1)$, $f'(-3) = ?$ 2) $y = \dfrac{1}{x}$, $f'(-2)$, $f'(3) = ?$

   3) $S = 2 - 5t^3$, $S'(0) = ?$ 4) $y = \dfrac{1-x}{x}$, $y'(1) = ?$

2. y축에 평행인 접선을 그을수 있는 점에서 함수는 미분가능하지 않다. 왜 그런가?

3. 미분가능한 점에서 함수는 련속이라는것을 증명하여라.

4. 함수 $y = |x|$는 점 $x=0$에서 련속이지만 미분가능하지 않다는것을 밝혀라.

3. 도함수계산

도함수를 구하는것을 미분한다고 말하고 도함수를 구하는 산법을 미분법이라고 부른다.

여러가지 함수의 도함수를 구하기 위하여 먼저 간단한 함수의 도함수를 구하고 도함수계산에서 널리 쓰이는 미분법의 규칙을 이끌어내기로 한다.

1) 상수의 도함수

$f(x)=c$ (c 는 상수)라고 하면

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$$

이므로

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

즉

$$(c)' = 0$$

2) 제곱함수의 도함수

$f(x) = x^n \ (n \in \mathrm{N})$ 이면

$$\begin{aligned}\triangle y &= f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n \\ &= \left(x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n\right) - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n \left(\Delta x^i = (\Delta x)^i\right)\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

따라서

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathrm{N})$$

3) 상수배수 및 합과 차의 도함수

정리 1. 함수 f, g 가 미분가능하면 cf (c 는 상수), $f+g$, $f-g$ 도 미분가능하고

(1) $(cf(x))' = cf'(x)$

(2) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(f(x)-g(x))' = f'(x) - g'(x)$

(증명) (1) $y=cf(x)$라고 놓으면

$\Delta y=cf(x+\Delta x)-cf(x)=c[f(x+\Delta x)-f(x)]$이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}c\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=cf'(x)$$

즉 $cf(x)$는 미분가능하고

$$(cf(x))'=cf'(x)$$

(2) $y=f(x)+g(x)$라고 놓으면

$\Delta y=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}+\frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

즉 $f+g$는 미분가능하고

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

차에 대해서도 꼭 마찬가지로 증명된다. (증명끝)

공식 (2)는 함수가 3개이상인 경우에도 그대로 성립한다.

례 1 1) $y=3x^2$이면

$y'=(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot 2x=6x$

2) $s=3\theta^2+\theta-5$이면

$s'=(3\theta^2+\theta-5)'=(3\theta^2)'+(\theta)'-(5)'=6\theta+1$

$s'(1)=6\cdot 1+1=7,\ s'(a+b)=6(a+b)+1$

례 2 어떤 물체가 법칙 $s=3t^2-2t+1$에 따라 직선운동을 한다. 운동이 시작된지 4초만에 물체의 속도를 구하여라. (시간의 단위는 초, 거리의 단위는 m이다.)

(풀이) 어떤 순간 t에서 물체의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=s'(t)=(3t^2-2t+1)'=(3t^2)'-(2t)'+(1)'=6t-2$$

따라서 4초만에 물체의 속도는

$$v(4)=s'(4)=6\cdot 4-2=22\ (\text{m/s})$$

례 3 포물선 $y=x^2-4x+5$의 점 M(3, 2)에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(풀이) $y'=(x^2-4x+5)'=2x-4$

$y'(3)=2\cdot 3-4=2$

이므로 구하려는 접선의 방향결수는 2이다.

그런데 접선의 방정식은 직선의 방정식이므로

$$y=kx+b$$

로 표시된다.

이때 $k=y'(3)=2$이므로

$$y=2x+b$$

구하려는 접선은 점 M(3, 2)를 지나므로

$$2=2\cdot 3+b$$

이로부터

$$b=-4$$

따라서 구하려는 접선의 방정식은

$$y=2x-4 \qquad \text{또는} \qquad 2x-y-4=0$$

문 제

1. 다음것을 구하여라.

   1) $y=x^7$, $y'(-1)=?$ 2) $s=\theta^4$, $s'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=?$

   3) $y=10^2$, $y'(1)=?$ 4) $y=\tan\frac{\pi}{3}$, $y'(0)=?$, $y'\left(\frac{5}{3}\pi\right)=?$

2. 다음 함수를 미분하여라.

   1) $y=1-x+2x^2-5x^3$ 2) $y=-\frac{2}{3}x^3+2x+5$

   3) $s=t^3-2t^2+2$ 4) $y=x^n+nx$, $y'(1)=?$, $y'(a)=?$

3. $\mathrm{P}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$일 때 $\mathrm{P}'(x)=?$, $\mathrm{P}'(a)=?$

4. 포물선 $y=2x^2-x$의 점 M(2, 6)에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

4) 적과 상의 도함수

정리 2. 함수 *f*, *g* 가 미분가능하면 $f \cdot g$, $f/g(g(x) \neq 0)$ 도 미분가능하고

(3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(증명) (3) $y = f(x) \cdot g(x)$ 라고 놓으면

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\ &= [f(x+\Delta x) - f(x)] \cdot g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \\ &\quad + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

그런데 g 는 미분가능하므로 련속이다. 따라서

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

즉 $f \cdot g$ 는 미분가능하고

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(4) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$ 이라고 놓고

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \\ &= \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)}\end{aligned}$$

와 같이 변형하여 공식 (3)과 꼭 마찬가지로 증명할수 있다.

례 4 1) $y=(2x+1)(3-x^2)$ 이면

$$y'=(2x+1)'(3-x^2)+(2x+1)(3-x^2)'=2(3-x^2)+(2x+1)(-2x)$$
$$=6-2x-6x^2$$

2) $y=\frac{x-1}{x+1}$ 이면

$$y'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

례 5 $y=\frac{1}{x^n}=x^{-n}\,(n\in \mathrm{N})$ 이면

$$y'=\frac{1'x^n-(x^n)'}{(x^n)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$
$$(x^{-n})'=-nx^{-n-1}$$

이리하여 n 이 옹근수인 테두리까지 제곱함수의 도함수공식을 넓힐수 있다.

$$(x^n)'=nx^{n-1}\quad (n\in \mathrm{Z})$$

문 제

1. $(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))'=f'(x)g(x)\,h(x)+f(x)g'(x)\,h(x)+f(x)g(x)\,h'(x)$
   가 성립한다는것을 증명하여라.
2. 다음 함수를 미분하여라.
   1) $y=(2x-5)(3x+1)$　　2) $y=(1-3x)(3x^2-x+2)$
   3) $y=(x+2)(x-3)(x+4)$　　4) $y=(1-x)(x-x^2)(x^2-x^3)$
3. 다음 함수를 미분하여라.
   1) $y=\frac{2x}{1-7x}$　　2) $s=\frac{1}{t^3}$　　3) $\rho=\theta+\frac{1}{\theta}$
   4) $y=3x^2-\frac{2}{5x^3}$　　5) $y=\frac{2x-1}{(x-1)(x-3)}$　　6) $y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1+x^2}$

련 습 문 제

1. 아래의 명제에서 옳은것과 옳지 않은것을 밝혀라.

   1) 함수 $f(x)$가 점 a에서 변화률을 가지지 않으면 $f(x)$는 점 a에서 련속이 아니다.

   2) $f'(a)$는 점 a에서 함수 $f(x)$에 그은 접선이다.

   3) 미분불가능한 점에서는 그 점에 대응하는 곡선의 점에서 접선을 그을수 없다.

   4) 점 a에서 미분가능한 함수는 그 점에서 극한도 가진다.

2. 가열된 물체의 온도변화규칙이 $u=f(t)$로 주어졌다. 시간구간 $[t, t+\Delta t]$에서 물체가 식는 평균속도와 순간 t에서 식는 속도를 구하여라.

3. 다음 함수를 미분하여라.

   1) $y=0.5-3x$ 2) $y=5x-4x^2$ 3) $S=10-t^3+2t^4$

   4) $f(x)=mx^n+nx^m$ 5) $y=2x^{10}+2x^5+x$

4. 다음 함수를 미분하여라.

   1) $y=x^3(x-1)$ 2) $y=(5z^2-1)(3+2z)$

   3) $y=(1-4s^2)(2s^2+1)$ 4) $y=(x^n+a^n)(x^m+a^m)$

   5) $y=(x^2+1)(3x-2)(1-x^2)$

5. 다음 함수를 미분하여라.

   1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 2) $y=\dfrac{2x^3-x+1}{x^2}$

   3) $y=\dfrac{(x+1)(2x-3)}{(2x-1)(x+3)}$ 4) $y=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{1-x^2}$

6. 어떤 물체가 $s=2t^2+1$이라는 법칙에 따라 직선운동을 한다. 운동이 시작된지 4초, 10초만의 속도를 각각 구하여라.

7. 포물선 $y=-x^2+2x$에 그은 접선이 x축과 $0°$의 각을 이루는 접점은 어떤 점인가? 또한 $45°$의 각을 이루는 접점은 어떤 점인가?

8. 포물선 $y=x^2+bx+c$가 직선 $y=2x-1$과 점 x=1에서 접하기 위하여서는 b와 c를 어떻게 정하면 되겠는가?

제 4 절. 여러가지 함수의 도함수

1. 삼각함수의 도함수

(1) $(\sin x)' = \cos x \ (-\infty < x < +\infty)$

(2) $(\cos x)' = -\sin x \ (-\infty < x < +\infty)$

(3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z)$

(4) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \ (x \neq k\pi,\ \ k \in Z)$

(증명) (1) $y = \sin x$ 이면

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

그런데

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

이므로

$$(\sin x)' = \cos x$$

(2) $y = \cos x$ 이면 $\sin x$ 의 경우와 꼭 마찬가지로 하여

$$(\cos x)' = -\sin x$$

(3) $y = \tan x$ 이면 상의 미분규칙에 의하여

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

이므로

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

(4) $y = \cot x$ 이면 $\tan x$ 의 경우와 꼭 마찬가지로 하여

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$$

례 1 1) $y = x^2 \sin x$ 이면

$$y' = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

2) $y = \dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$ 이면

$$y' = \left(\frac{2+\cos x}{2-\cos x}\right)' = \frac{(2+\cos x)'(2-\cos x) - (2+\cos x)(2-\cos x)'}{(2-\cos x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(2-\cos x) - (2+\cos x)\sin x}{(2-\cos x)^2} = -\frac{4\sin x}{(2-\cos x)^2}$$

례 2 점 O(0, 0)에서 곡선 $y = \tan x$ 에 그은 접선이 x 축과 이루는 각과 그 접선의 방정식을 구하여라.

(풀이) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 이므로 $y'(0) = 1$

따라서 점 O(0, 0)에서 그은 접선의 방향결수는 $\tan\beta = 1$

이로부터 접선이 x 축과 이루는 각은

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

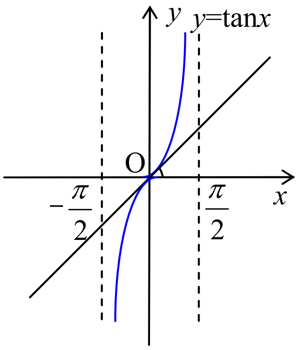


그림 2-23

따라서 구하려는 접선의 방정식은 1사분구의 자리표각의 2등분선 $y = x$ 이다.

그러므로 탕겐스곡선은 원점 O 에서 직선 $y = x$ 에 접한다.

문 제

1. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \dfrac{3}{2}\sin x$ 2) $y = \sin x \cos x$

3) $y = (3x^2 + \sin x)(x - \cos x)$ 4) $y = x \cot x$

2. 점 O(0, 0)에서 곡선 $y=\sin x$에 그은 접선이 x축과 이루는 각과 그 접선의 방정식을 구하여라.

2. 합성함수의 도함수

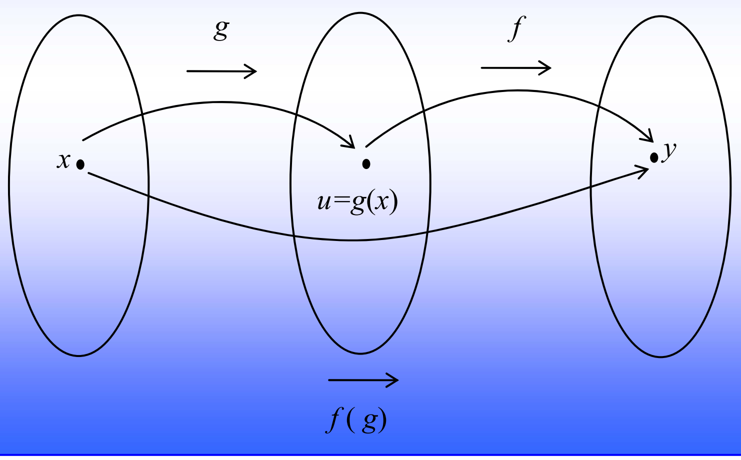
함수 $y=(2x+1)^3$에서 독립변수 x에 대응하는 함수값을 계산하자면 먼저 $2x+1$의 값을 계산하고 다음에 이 값의 3제곱을 계산한다. 즉

$$\begin{cases} u=2x+1 \\ y=u^3 \end{cases}$$

그러므로 함수 $y=(2x+1)^3$은 두 함수 $y=u^3$과 $u=2x+1$를 합성한것이다.

y가 u의 함수 $y=f(u)$이고 u가 또한 x의 함수 $u=g(x)$이면 y는 x의 어떤 함수로 된다. 이 함수를 $f(g)$로 표시하고 함수 f와 g의 합성함수라고 부른다. 즉

$$y=f(g)(x)=f[g(x)]$$



례 1 1) $y=\sin 3x$는 두 함수 $y=\sin u$, $u=3x$로 이루어진 합성함수이다.

2) $y=\log_2(x^2+1)^3$은 $y=\log_2 u$, $u=v^3$, $v=x^2+1$로 이루어진 합성함수이다.

이제 합성함수의 미분공식을 얻어내자.

정리. (합성함수의 미분법)

함수 g가 점 x에서 미분가능하고 f가 점 u 〔$u=g(x)$〕에서 미분가능하면 합성함수 $f(g)$도 점 x에서 미분가능하고

$$(f(g))'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

(증명) 함수 $u=g(x)$에서 독립변수 x의 증분 $\triangle x$에 대응하는 u의 증분을 $\triangle u$, 함수 $y=f(u)$에서 증분 $\triangle u$에 대응하는 y의 증분을 $\triangle y$라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

그런데 $u=g(x)$가 미분가능하므로 련속함수이다.

따라서 $\Delta x\to 0$일 때 $\triangle u\to 0$이고 f와 g의 미분가능성을 고려하면

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

즉 $f(g)$는 미분가능하고

$$y'=(f(g))'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

(주의) 함수 $u=g(x)$에서 독립변수 x의 증분 $\triangle x$에 대응하는 u의 증분 $\triangle u$가 령이면 우와 같은 방법으로는 증명할수 없다. 그러나 이 경우에도 정리는 성립한다.

례 2 1) $y=(2x+1)^3$은 두 함수 $y=u^3$, $u=2x+1$로 이루어진 합성함수이므로

$$y'=(u^3)'(2x+1)'=3u^2\cdot 2=6(2x+1)^2$$

2) $y=\sin x^2$은 $y=\sin u$, $u=x^2$으로 이루어진 합성함수이므로

$$y'=(\sin u)'(x^2)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2$$

문 제

1. $f(x)=2-x-x^2$, $g(x)=\lg x$, $h(x)=\dfrac{x}{x-3}$ 일 때 다음 함수들을 써라.

1) $f(g)(x)$ 2) $g(f)(x)$ 3) $f(h)(x)$

4) $h(f)(x)$ 5) $g(h)(x)$ 6) $h(g)(x)$

2. 다음 함수들은 어떤 함수들의 합성으로 이루어졌는가?

1) $y=\cos^2 x$ 2) $y=2^{x+1}$ 3) $y=\sin^3 x^2$ 4) $y=\ln(\cos x)$

3. 다음 함수들가운데서 $f(x)=2x^2+1,\ g(x)=\dfrac{2\sin x}{1+\tan x}$ 에 대하여 $g(f)(x)$ 로 되는 것을 찾아보아라.

1) $\dfrac{8\sin^2 x}{(1+\tan)^2}+1$ 2) $\dfrac{2(2x^2+1)\sin x}{1+\tan x}$

3) $\dfrac{2\sin(2x^2+1)}{1+\tan(2x^2+1)}$ 4) $2x^2+1+\dfrac{2\sin x}{1+\tan x}$

4. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=(x^2-2x+3)^2$ 2) $y=(1+x)^2(2-x)$

3) $y=(ax^3+6)^m$ 4) $y=(x-\dfrac{1}{x})^3$

5) $y=\cos^2 x$ 6) $y=\sin(3x^2+5)^2$

례 3 방정식 $x^2+4y^3-1=0$ 으로 만들어지는 x 의 함수 y 의 도함수를 구하고 $y'(0)$ 을 계산하여라.

(풀이) y 가 x 의 함수라는것을 고려하면

$$\frac{dy^3}{dx}=\frac{dy^3}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=3y^2\cdot\frac{dy}{dx}$$

방정식 $x^2+4y^3-1=0$ 의 두 변을 x 에 관하여 미분하면

$$2x+4\cdot 3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

이로부터 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{6y^2}$

$x = 0$에 대응하는 y의 값은 $0^2 + 4y^3 - 1 = 0$이므로

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

따라서 $y'(0) = -\frac{0}{6\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^2} = 0$

문 제

1. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \cos\frac{x}{2}$　2) $y = \tan x^2$　3) $y = \cos(ax + b)$

4) $y = \frac{\cos^2 x}{x}$　5) $y = \frac{1}{(1 + x^2)^3}$　6) $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}\right)^2$

2. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}$　2) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$

3) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)^3}}$　4) $y = (a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$

3. $y = \sqrt{1 + a} + \sqrt{1 - x}$ 일 때 y'는 (　)이다.

1) $\frac{1}{2\sqrt{1 + a}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$　2) $\frac{1}{2\sqrt{1 + a}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$

3) $\frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$　4) $-\frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$

4. 다음 방정식을 만족시키는 x의 함수 y의 도함수를 구하여라.

1) $x^2 + y^2 = 1$　2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

3) $x^2 - 2xy + y^3 = 1,\ y'(0) = ?$　4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

5. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = f(x^2)$　2) $y = f\left[f^2(x)\right]$

여기서 f는 미분가능한 함수이다.

6. 쌍곡선 $xy = a^2$의 임의의 한 점에서 그은 접선과 두 자리표축으로 둘러싸인 3각형의 면적은 일정하다는것을 증명하여라.

3. 거꿀삼각함수의 도함수

(1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(3) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

(4) $(\text{arccot}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

(증명) (1) $y = \arcsin x$ 라고 놓으면

$$x = \sin y \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

y 가 x 의 함수이라는것을 고려하여 두 변을 x 에 관하여 미분하면

$$1 = \frac{d\sin y}{dx} = \frac{d\sin y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

이로부터

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

그런데 $\cos y > 0$ $(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2})$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $y = \arccos x$ 라고 놓으면

$$x = \cos y \quad (0 < y < \pi)$$

두 변을 x 에 관하여 미분하면

$$1 = \frac{d\cos y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = -\sin y\frac{dy}{dx}$$

$\sin y > 0$ $(0 < y < \pi)$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $y = \arctan x$ 라고 놓으면

$$x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

두 변을 x에 관하여 미분하면

$$1 = \frac{d \tan y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(4) $y = \operatorname{arccot} x$ 라고 놓으면 $\arctan x$의 경우와 꼭 마찬가지로 하여

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

례 1) $y = x^2 \arcsin x$

$$y' = 2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2) $y = \arctan \dfrac{1 + x}{1 - x}$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)' = \frac{(1 - x)^2}{(1 - x)^2 + (1 + x)^2} \cdot \frac{-2x}{(1 - x)^2} = \frac{-x}{1 + x^2}$$

문 제

1. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \arcsin \dfrac{x}{a}$ 2) $y = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$ 3) $y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = (\arcsin 2x)^2$ 2) $y = \arccos(3x - 4x^3)$

3) $y = \dfrac{2}{3} \arctan x + \dfrac{1}{2} \operatorname{arccot} \dfrac{x}{1 - x^2}$

4. 로그함수와 지수함수의 도함수

(1) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (a>0,\ a\neq 1,\ \ x>0)$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(2) $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>0,\ \ a\neq 1)$

$$(e^x)' = e^x$$

(증명) (1) $y = \log_a x$ 로 놓으면

$$\Delta y = \log_a (x+\Delta x) - \log_a x = \log_a (1+\frac{\Delta x}{x})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a (1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a (1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\log_a (1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$\dfrac{x}{\Delta x} = t$ 로 놓으면 $(\triangle x \to 0 \leftrightarrow \triangle t \to \infty)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a [\lim_{\Delta t\to 0}(1+\frac{1}{t})^t] = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$$

즉

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

특히 $a = e$ 이면 $\ln e = 1$ 이므로

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(2) $y = a^x$ 의 거꿀함수 $x = \log_a y$ 에서 y 가 x 의 함수라는것을 고려하여 두 변을 x 에 관하여 미분하면

$$1 = \frac{d\log_a y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y\ln a}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\ln a = a^x \ln a$$

특히 $a = e$ 이면

$$(e^x)' = e^x$$

례 1 1) $y=\ln(x^2+1)$이면

$y=\ln u,\ u=x^2+1$ 이므로

$$y'=(\ln u)'(x^2+1)' = \frac{1}{u}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

2) $y=a^{\sin x}$ 이면

$y=a^u$, $u=\sin x$ 이므로

$$y'=(a^u)'(\sin x)' = a^u\cdot\cos x\cdot\ln a$$
$$=a^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln a$$

3) $y=e^{-\sqrt{x}}$ 이면

$y=e^u$, $u=-\sqrt{x}$ 이므로

$$y'=(e^u)(-\sqrt{x})' = e^u\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

로그함수의 도함수공식을 써서 α 가 임의의 실수일 때도 공식

$$(x^\alpha)' = \alpha\ x^{\alpha-1}\ ,\quad \alpha\in\mathrm{R}$$

이 성립한다는것을 쉽게 증명할수 있다.

사실 $y=x^\alpha$ 의 두 변에 로그를 취하면

$$\ln y = \alpha\ \ln x$$

y 가 x 의 함수라는것을 고려하여 두 변을 x 에 관하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \alpha\ \frac{1}{x}$$

$$y' = \alpha\cdot y\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

즉

$$(x^\alpha)' = \alpha\ x^{\alpha-1}$$

이와 같이 두 변에 로그를 취하고 미분하는 방법을 **로그미분법**이라고 부른다.

례 2 $y = x^x \ (x > 0)$ 를 미분하여라.

(풀이) 두 변에 로그를 취하면

$$\ln y = x \ln x$$

y가 x의 함수라는것을 고려하여 두 변을 x에 관하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

문 제

1. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \ln 3x$　　2) $y = \log_9 x^2$

3) $y = \log_3(3x^2 + 2x + 1)$　　4) $y = \ln|x|$

2. $y = \ln|f(x)|$ 이면 $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 이다. 왜 그런가?

3. $y = \ln\dfrac{1}{x} - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ 일 때 y' 를 구하여라.

4. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$　　2) $y = \sqrt[3]{x}\lg x$　　3) $y = (x^2 + 1)^\pi$

5. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = e^{3x}$　　2) $y = e^{3x}\ln x$

3) $y = 2^x \cos x$　　4) $y = \dfrac{3^x}{2^x + 5^x}$

5) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\cos 2x}$　　6) $y = \mathrm{A}e^{-x}\sin x$

6. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = x^{\sin x}$　　2) $y = (\sin x)^x$

도함수공식표

y	y'	y	y'
c	0	$\cos x$	$-\sin x$
x^{α}	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\tan x$	$\sec^2 x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\cot x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

미분법의 기본규칙

1) $(cf)' = cf'$(c는 상수)

2) $(f+g)' = f' + g'$

3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

5) $(f(g))'(x) = f'[g(x)]g'(x)$

5. 2계도함수

어떤 물체가 $s = f(t)$라는 법칙에 따라 직선운동을 한다면 어떤 순간 t에서 속도 $v(t)$는

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

물체가 부등속운동을 한다면 속도 v는 시간에 따라 달라진다. 따라서 그의 변화속도를 또한 생각할수 있다. 즉

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}$$

이것을 순간 t에서의 물체의 가속도로 정한다. 바로 가속도는 속도를 표시하는 도함수의 변화률이므로 도함수의 도함수이다.

이와 같이 과학과 기술의 문제들가운데는 주어진 함수의 도함수뿐만아니라 도함수의 도함수를 또한 생각해야 할 경우들이 자주 있다.

함수 $f(y=f(x))$의 도함수의 도함수 $(f')'$ 즉

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수 f의 **2계도함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$f'',\ y'',\ \frac{d^2 f}{dx^2},\ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

가속도 a는

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{df'(t)}{dt} = f''(t)$$

즉 2계도함수는 력학적으로 보면 가속도를 의미한다.

례 1 1) $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$이면

$$y' = 3x^2 + 4x - 1,\quad y'' = 6x + 4$$

$$y''(0) = 6 \cdot 0 + 4 = 4$$

2) $y = \ln(1+x)$이면

$$y' = \frac{1}{1+x},\quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''(-2) = -\frac{1}{(1-2)^2} = -1$$

례 2 질점 M이 $x = 2t - t^2$이라는 법칙에 따라 직선운동을 한다. 질점 M의 속도 v와 가속도 a를 구하여라.

(풀이) 질점 M이 $x = 2t - t^2$이라는 법칙에 따라 운동하므로 속도 v는

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 - 2t$$

가속도 a는

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -2$$

이 례에서 $0 \le t < 1$이면 $v > 0$ $(f'(t) > 0)$이다. 이때 질점 M은 x축의 정방향으로 운동한다. 또한 $t > 1$이면 $v < 0$ $(f'(t) < 0)$이다. 이때 질점 M은 x축의 부방향으로 운동한다.

$t=1$일 때 $v=0$ ($f'(t)=0$)이다. 이때 질점 M은 순간적으로 정지하면서 운동방향을 바꾼다.



그림 2-24

일반적으로 직선운동 $x=f(t)$에서 순간 t에서의 $|f'(t)|$를 그 크기로 하고 질점 M이 운동하는 방향으로 향하는 벡토르를 $\vec{v}$라고 하면 순간 t에서의 속도를 $\vec{v}$로 표시할수 있다.

2계도함수를 정의한것과 꼭같은 방법으로 함수 f의 2계도함수 f''의 도함수 $(f'')'$를 f의 **3계도함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$f''',\quad y''',\quad \frac{d^3f}{dx^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$를 n번 계속 미분하여 얻는 함수를 함수 f의 ***n*계도함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$f^{(n)},\quad y^{(n)},\quad \frac{d^nf}{dx^n},\quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

2계이상의 도함수를 **고계도함수**라고 부르고 이것과 구별하여 도함수 f'를 **1계도함수**라고 부른다.

례 3 $y=\sin x$이면

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x$$
$$y'''=-\cos x,\quad y^{(4)}=\sin x$$

한편

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'''=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$$

일반적으로

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

문 제

1. 다음 함수의 2계도함수를 구하여라.

   1) $y = x^5 + 2x^3 - 3x + 1$　　2) $y = x\sin x$

   3) $y = e^{-x^2}$　　4) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

2. $y = e^x \sin x$가 다음 방정식에 맞는가를 따져보아라.

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

3. $y = u(x)v(x)$일 때 y''를 구하여라.

4. 다음 함수의 지적된 계수의 도함수를 구하여라.

   1) $y = e^{\alpha x}$, $y''' = ?$　　2) $y = (3x+2)^n$, $y^{(4)} = ?$

   3) $y = x^n$, $y^{(n)} = ?$　　4) $y = \frac{c}{x}$, $y^{(n)} = ?$

   5) $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $y^{(n)} = ?$

5. 어떤 물체를 처음속도 300㎧로 땅면에 수직되게 쏘아올렸다. t초 후의 물체의 높이를 h라고 하면

$$h = 300t - 4.9t^2$$

이다. 이 물체가 가장 높은 높이에 이르기까지의 시간과 그 높이를 구하여라. 그리고 다음 순간에 물체가 올라가는가 떨어지는가를 말하여라.

   1) $t = 20s$　　2) $t = 30s$　　3) $t = 32s$

6. 점 M이 흘떨기 $x = r\sin(\omega t + a)$를 한다. 그 속도와 가속도를 구하여라. 점 M의 가속도는 그 자리표에 비례한다는것을 증명하여라.

련 습 문 제

1. 다음 함수를 미분하여라.

   1) $y = (x^2 - 2x + 3)^4$　　2) $y = (x^2 - 1)^2 (x+2)^2$

   3) $y = \frac{1}{(ax+b)^2}$　　4) $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2+1}}$

   5) $y = \sqrt[3]{x^2+1}$　　6) $y = \sqrt[3]{(2x^2 - x + 1)^2}$

   7) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$　　8) $y = 2x\sqrt[3]{(3-2x)^2}$

2. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \cot^2 2x$ 2) $y = (\cos 2x - \sin 3x)^2$ 3) $y = \sin(\cos x)$

4) $y = \cos ax \sin bx$ 5) $y = \arccos\frac{2x}{1+x^2}$ 6) $y = \arcsin(\cos x)$

7) $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$ 8) $y = \tan\frac{x}{2} + \arctan(\tan\frac{x}{2})$

3. 다음 식들에서 $y = y(x)$이다. y'를 구하여라.

1) $y^2 = 2x$ 2) $y^4 = 2x^5$

3) $x^3 + y^3 - 3a^2x = a^3$ 4) $y = \cos(x+y)$

4. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = \ln(x^3 + x^2)$ 2) $y = \ln\tan x$

3) $y = x\ln(x+1)$ 4) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

5) $y = e^{ax}\cos bx$ 6) $y = e^{-x}2^x$

7) $y = e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x+1}\right)$

5. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$의 점 (x_0, y_0)에서 타원에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

6. 다음 함수의 2계도함수를 구하여라.

1) $y = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$ 2) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

3) $y = x^2\ln x$ 4) $y = (t-2)e^{2t}$

7. 다음 함수의 지적된 계수의 도함수를 구하여라.

1) $y = \frac{x^2}{1-x}$, $y'' = ?$ 2) $y = \sqrt{1-2x}$, $y''' = ?$

3) $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $y''' = ?$ 4) $y = \cos x$, $y^{(n)} = ?$

5) $y = a^x$, $y^{(n)} = ?$ 6) $y = \sin\theta x$, $y^{(n)} = ?$

8. $y = \sqrt{2x - x^2}$이 다음 방정식에 맞는가를 따져보아라.

$$y^3y'' + 1 = 0$$

9. $f(x) = ax + bx^3 + x^5$이 다음 방정식에 맞도록 a, b, c를 정하여라.

$$\left(1 - \frac{3}{7}x^2\right)f''(x) + cf(x) = 0$$

10. 물체가 법칙 $x = ae^t + be^{-t}$에 따라 직선운동을 하면 그의 가속도는 그 크기가 운동경로와 같다는것을 증명하여라.

11. 다음 법칙에 따라 직선운동을 하는 물체의 지적된 순간에서의 속도와 가속도를 구하여라.

1) $s = t^3 + 2t^2, \quad t = 2$ 2) $s = 3\cos\frac{\pi}{3}t, \quad t = 1$

12. 물체의 운동이 $s = a + bt + ct^2$ 이라는 법칙으로 주어졌다. 물체에 일정한 힘이 작용하고있다는것을 증명하여라.

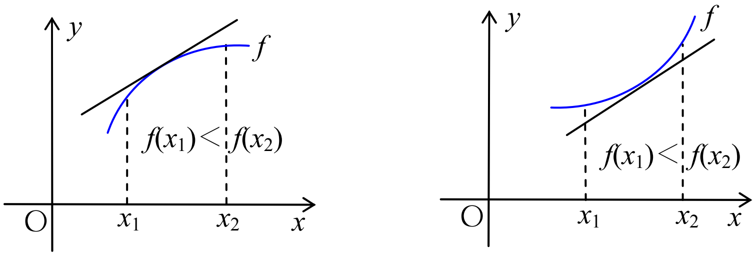
13. 원의 면적이 시간에 따라 일정한 속도로 늘어날 때 원둘레가 늘어나는 속도는 반경에 거꿀비례한다는것을 증명하여라.

제 5 절. 도함수의 응용

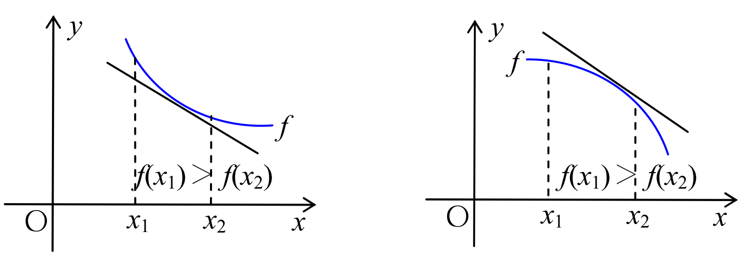
1. 함수의 증가와 감소

어떤 구간에서 변수 x 의 값이 커질 때 함수 $f(x)$ 의 값이 커지면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 말한다. 또한 변수 x 의 값이 커질 때 함수 $f(x)$ 의 값이 작아지면 함수 f 는 이 구간에서 감소한다고 말한다.

그림 2-25에서 보는바와 같이 증가하는 함수의 그라프는 변수의 값이 커지는데 따라 왼쪽에서부터 오른쪽으로 오르는 곡선이고 감소하는 함수의 그라프는 왼쪽에서 오른쪽으로 내리는 곡선이다.



증가함수



감소함수

그림 2-25

도함수값 $f'(x)$는 함수 f의 그라프의 점 $M(x, f(x))$에서 그라프에 그은 접선의 방향결수를 의미하므로 $f'(x)$의 부호에 의하여 함수가 증가하는가 감소하는가를 판정할수 있다.

$f'(x)>0$인 점 $M(x, f(x))$를 간단히 점 x로 부르기로 한다.

x에서 함수 f의 그라프에 그은 접선은 그 방향결수가 정이므로 왼쪽에서부터 오른쪽으로 오르는 직선이다.

따라서 점 x가까이에서 함수의 그라프는 왼쪽에서 오른쪽으로 오른다. 즉 f는 점 x가까이에서 증가한다.(그림 2-26 ㄱ))

$f'(x)<0$인 점 x에서 f의 그라프에 그은 접선은 그 방향결수가 부이므로 왼쪽 에서부터 오른쪽으로 내리는 직선이다. 따라서 점 x가까이에서 함수의 그라프는 왼쪽에서 오른쪽으로 내려간다.

즉 f는 점 x가까이에서 감소한다.(그림 2-26 ㄴ))

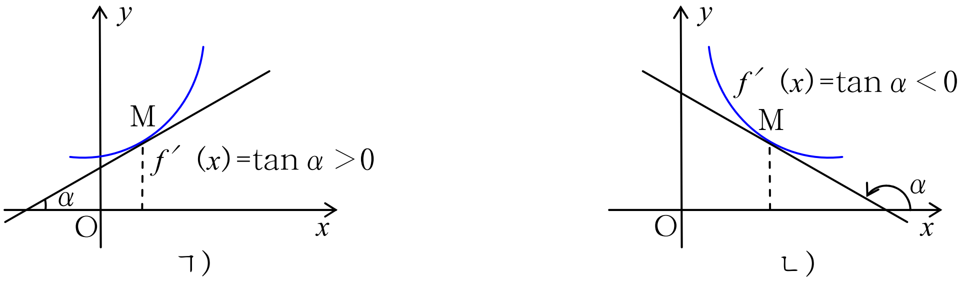


그림 2-26

이리하여 도함수의 부호에 의하여 함수의 증가와 감소를 다음과 같이 판정할수 있다.

함수의 증가, 감소의 판정

어떤 구간에서

1) $f'(x)>0$이면 f는 그 구간에서 증가한다.

2) $f'(x)<0$이면 f는 그 구간에서 감소한다.

어떤 구간에서 $f'(x)=0$이면 이 구간의 매개 점에서 함수 f의 그라프에 그은 접선은 x축에 평행이다. 그러므로 그라프자체도 x축에 평행인 직선이다.

따라서 함수 f는 이 구간에서 상수이다.

함수 f가 어떤 구간에서 $f'(x)=0$이면 f는 이 구간에서 상수이다.

함수 f 가 어떤 구간에서 감소하거나 증가할 때 이 구간에는 $f'(x)=0$인 점이 있을수 있다.

례를 들어 함수 $f(x)=x^3$ 은 $(-\infty,\ +\infty)$에서 분명히 증가하나 $x=0$ 에서 그 도함수값은 0 이다. 즉 $f'(0)=3\cdot 0^2=0$ (그림 2-27)

이리하여 함수 f 가 어떤 구간에서 증가하면 일반적으로 그 구간에서 $f'(x)\ge 0$ 이다.

마찬가지로 어떤 구간에서 감소하면 일반적으로 그 구간에서 $f'(x)\le 0$ 이다.

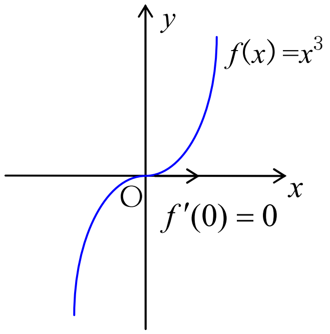


그림 2-27

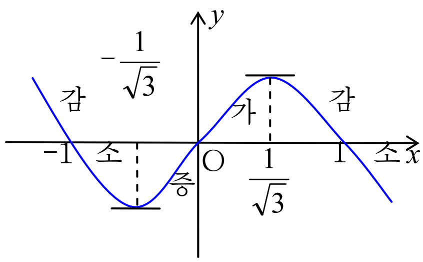


그림 2-28

례 1 함수 $f(x)=x-x^3$ 의 증가구간과 감소구간을 구하여라.

(풀이) 주어진 함수의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$이다.

도함수를 구하면

$$f'(x)=1-3x^2$$

이로부터

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $\qquad f'(x)=0$

$x<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $\qquad f'(x)<0$

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $\qquad f'(x)>0$

$x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $\qquad f'(x)<0$

따라서 함수 $f(x)=x-x^3$ 은 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ +\infty\right)$ 에서 감소하고 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$에서 증가한다. 대략적으로 그리면 그림 2-28과 같다.

함수 f 가 어데서 증가하고 어데서 감소하는가 하는것을 조사하기 위하여 $f'(x)$ 의 부호를 살피려면 먼저 $f'(x)=0$ 에 맞는 점들을 구하고 이 점들을 경계로 하여 함수가 주어진 구간을 몇개의 구간으로 나누고 이 매개 구간에서 $f'(x)$ 의 부호를 살피면 된다.

례 2 함수 $f(x)=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$ 의 증가구간과 감소구간을 구하여라.

(풀이) 주어진 함수의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$이다. 도함수를 구하면

$$f'(x)=6\frac{(x^2+3)-(x-1)2x}{(x^2+3)^2}=6\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}=-\frac{6(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

이로부터 $x=-1,\ x=3$ 에서 $f'(x)=0$ 이다.

그러므로 함수의 뜻구역 $(-\infty,\ +\infty)$ 를 -1, 3을 경계로 하여 다음과 같이 3개의 구간으로 나누고 매개 구간에서 도함수의 부호를 살피여 함수의 증가와 감소를 판정한다.

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘ 감소	-3	↗ 증가	1	↘ 감소	

주어진 함수는 $(-\infty,\ -1)$, $(3,\ +\infty)$ 에서 감소하고 $(-1,\ 3)$에서 증가한다.

이 함수의 대략적인 그라프를 그리면 그림 2-29 와 같다.

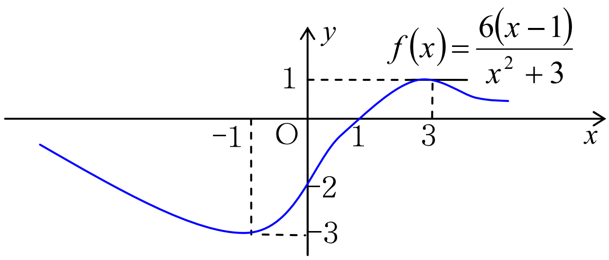


그림 2-29

문 제

1. $f'(x)=g'(x)$ 이면 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 상수만 한 차이를 가진다는것을 밝혀라.

2. 다음 함수들은 어데서 증가하고 어데서 감소하는가?

1) $f(x)=-2x^2+8x+1$ 2) $g(x)=x^3-12x+7$

3) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 4) $u(x)=\cos x-x$

5) $v(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 6) $w(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

3. 2차함수 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 는 어데서 증가하고 어데서 감소하는가?

4. 다음 함수는 $(-\infty,\ +\infty)$에서 계속 증가하거나 감소한다는것을 밝혀라.

1) $f(x)=1-6x+4x^2-2x^3$ 2) $g(x)=x+\sin x$

2. 함수의 극대와 극소

함수 f 를 놓고 $f(a)$ 가 점 a 가까이에서 가장 큰 값이면 즉 $x=a$ 가까이의 아무런 점 x 를 잡아도

$$f(x)<f(a)$$

이면 함수 f 는 점 $x=a$ 에서 **극대로 된다**고 말하고 $f(a)$ 를 **극대값**, $x=a$ 를 **극대점**이라고 부른다.

이와 비슷하게 $f(a)$ 가 점 a 가까이에서 가장 작은 값이면 즉 $x=a$ 가까이의 아무런 점 x 를 잡아도 늘 $f(x)>f(a)$ 이면 함수 f 는 점 $x=a$ 에서 **극소로 된다**고 말하고 $f(a)$ 를 **극소값**, $x=a$ 를 **극소점**이라고 부른다.

함수의 극대값과 극소값을 통털어 **극값**이라고 부르고 극대점과 극소점을 통털어 **극값점**이라고 부른다.

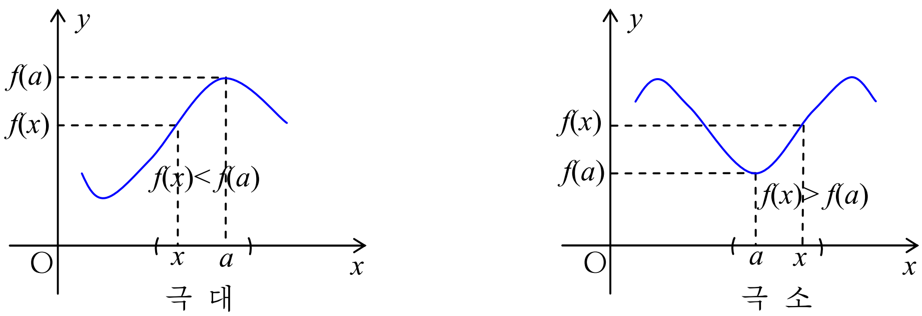


그림 2-30

극대, 극소의 정의에서 점 $x=a$ 가까이라는것은 점 a 의 왼쪽으로 가까운 점, 오른쪽으로 가까운 점을 다 통털어서 하는 말이다. 그러므로 극값은 그 점 량쪽에서 함수가 뜻을 가지는 점 즉 끝점이 아닌 아낙점에서만 가질수 있다.

그리고 함수 f 의 극값은 그 함수의 뜻구역전체에서 반드시 $f(x)$ 의 가장 큰값, 가장 작은 값으로 되는것은 아니다.

따라서 개별적인 극대값이 극소값보다 작을수 있다.

그림 2-31에서 보는것처럼 함수의 그라프에서 봉우리로 되는 점에서 극대로 되고 곬으로 되는 점에서 극소로 된다.

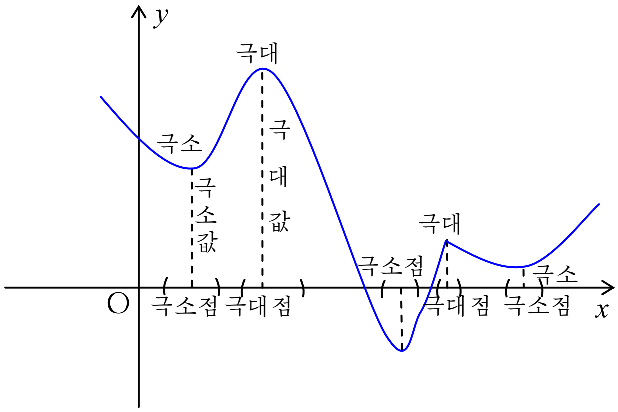


그림 2-31

모든 함수가 다 극값을 가지는것은 아니다. 계속 증가하거나 감소하는 함수 례를 들어 1차함수 $y=ax+b$ 는 극값을 안 가진다.(그러므로 함수의 극값을 따질 때는 이러한 함수는 빼놓고 생각한다.)

함수 $f(x)$ 에서 변수 x 가 증가해오다가 점 a 를 지날 때 함수 $f(x)$ 의 값이 증가로부터 감소로 바뀌면 분명히 함수 f 는 점 $x=a$ 에서 극대로 되고 거꾸로 감소로부터 증가로 바뀌면 함수 f 는 점 $x=a$ 에서 극소로 된다.

이리하여 함수 f 가 미분가능할 때 다음과 같은 조건에 의하여 함수 f 의 극대, 극소를 판정할수 있다.

극대극소판정조건

점 a 를 포함하는 충분히 작은 구간에서

1) $x<a$ 에서 $f'(x)>0$, $x>a$ 에서 $f'(x)<0$ 이면 점 $x=a$ 는 f 의 극대점

2) $x<a$ 에서 $f'(x)<0$, $x>a$ 에서 $f'(x)>0$ 이면 점 $x=a$ 는 f 의 극소점

이 판정조건으로부터 다음 사실이 곧 나온다.

f' 가 련속일 때 f 가 점 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

이것은 극값을 가지는 점에서 그라프에 그은 접선이 x 축에 평행이라는것을 보여준다. 그런데 점 $M(a, f(a))$ 에서 x 축에 평행인 접선을 가지는 그라프는 그림 2-32에서 보는바와 같이 여러 경우가 있다.

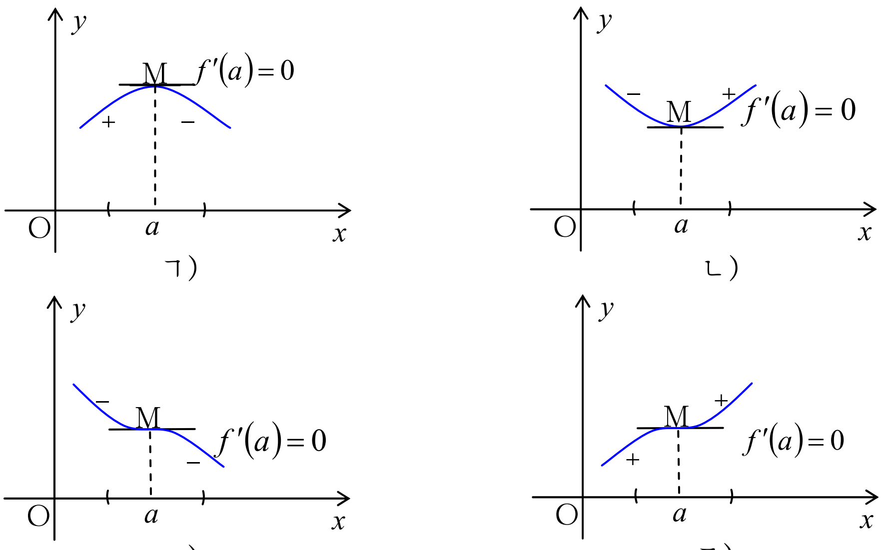


그림 2-32

그림에서 ㄷ), ㄹ)은 $f'(a)=0$ 인 점 $x=a$ 에서 f 가 반드시 극값을 가지는것은 아니라는것을 보여준다.

이로부터 미분가능한 함수 f 의 극값점은 $f'(x)=0$ 에 맞는 점가운데 있다는것을 알수 있다.

$f'(x)=0$ 에 맞는 점을 함수 f 의 **정류점(머물점)**이라고 부른다.

이리하여 함수 f 의 극값점을 구하자면 먼저 방정식 $f'(x)=0$ 을 풀어 정류점을 찾고 정류점의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 $f'(x)$ 의 부호를 살펴 극대, 극소를 판정한다.

정류점 ($f'(a)=0$)	$\cdots a \cdots$	판 정
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$	극대점
	$- \quad 0 \quad +$	극소점
	$\pm \quad 0 \quad \pm$	극값점이 아니다.

례 1 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$ 의 극값을 구하여라.

(풀이) 함수의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$ 이다.

도함수를 구하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 을 풀어 정류점을 구하면

$$x_1=-1,\quad x_2=2$$

정류점 $x_1=-1$ 의 왼쪽가까이 $x<-1$ 에서 $f'(x)>0$ 이고 오른쪽가까이 $x>-1$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 점 $x_1=-1$ 은 f 의 극대점이며 극대값은 $f(-1)=13$, 점 $x_2=2$ 의 왼쪽가까이 $x<2$ 에서 $f'(x)<0$ 이고 오른쪽가까이 $x>2$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 점 $x_2=2$ 는 f의 극소점이며 극소값은 $f(2)=-14$

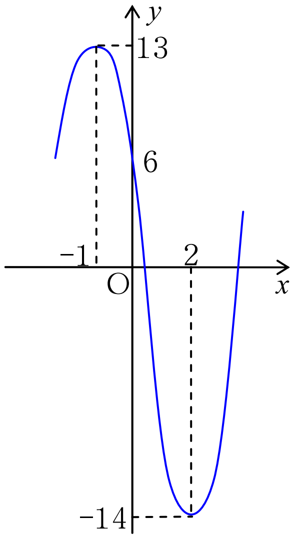


그림 2-33

우에서 본 결과를 표로 만들어보면 다음과 같다.

x	$-\infty$	$\cdots$	-1		2	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗ 증가	13 극대	↘ 감소	-14 극소	↗ 증가	

이 표를 보고 함수의 대략적인 그라프를 그리면 그림 2-33 과 같다.

함수 $f(x)=|x|$ 은 점 $x=0$ 에서 미분가능하지 않지만 분명히 점 $x=0$ 은 이 함수의 극소점이다.

이와 같이 함수가 미분가능하지 않는 점에서도 극값을 가질수 있다.

이 경우에도 우에서와 마찬가지로 미분가능하지 않는 점의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 도함수 f' 의 부호변화를 살펴 극대, 극소를 판정한다.

례 2 함수 $f(x)=x\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 의 극값을 구하여라.

(풀이) 함수의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$ 이다. 도함수를 구하면

$$f'(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{3(x-1)+2x}{3\sqrt[3]{x-1}}=\frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

정류점은 $x_1=\dfrac{3}{5}$ 이고 점 $x_2=1$ 에서 함수 f 는 미분가능하지 않다.

정류점 $x_1=\dfrac{3}{5}$ 의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 f' 의 부호를 살피면

$$x < \frac{3}{5} \text{에서} \quad f'(x) > 0$$

$$x > \frac{3}{5} \text{에서} \quad f'(x) < 0$$

이므로 점 $x_1 = \frac{3}{5}$은 f의 극대점이며 극대값은

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

미분가능하지 않는 점 $x_2 = 1$의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 f'의 부호를 살피면

$$x < 1 \text{에서} \quad f'(x) < 0$$

$$x > 1 \text{에서} \quad f'(x) > 0$$

이므로 점 $x = 1$은 f의 극소점이며 극소값은 $f(1) = 0$

우에서 본 결과를 표로 만들어보면 다음과 같다.

x	$-\infty$	$\cdots$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
f'		+	0	−	없다 (∞)	+	
f		↗ 증가	$\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ 극대	↘ 감소	0 극소	↗ 증가	

이 표를 보고 함수의 대략적인 그라프를 그리면 그림 2-34와 같다.

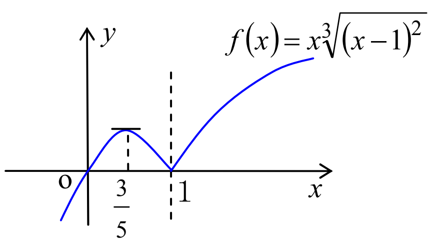


그림 2-34

이 함수의 그라프를 그릴 때 $f'(1) = \pm\infty$이므로 점 $x = 1$에서 y축에 평행인 접선을 가지도록 그려야 한다.

문 제

1. 다음 함수의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y=2x^2-3x+1$　　2) $y=-4x^2+2x+1$

3) $y=x^3-6x^2+15x+16$　　4) $y=\dfrac{8x}{x^2+4}$

2. 다음 함수의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$　　2) $f(x)=x^2-2|x|$

3) $g(x)=|x-x^2|$　　4) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

3. 최대값과 최소값

최대값과 최소값이라고 하면 함수가 주어진 뜻구역전체에 걸쳐서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 의미한다.

함수 f가 닫긴구간 $[a, b]$에서 련속이면 이 함수는 이 구간에서 최대값과 최소값을 가진다는것이 알려져있다.

이 경우에는 (a, b) 에서의 모든 극대값, 극소값들과 두 끌점에서의 함수값 $f(a), f(b)$들가운데서 가장 큰 값이 최대값이고 가장 작은 값이 최소값이다.

특히 함수 f 가 $[a, b]$ 에서 증가함수(감소함수)이면 왼쪽 끌점에서의 함수값 $f(a)$가 최소값(최대값)이 되고 오른쪽 끌점에서의 함수값 $f(b)$가 최대값(최소값)이 된다.

함수 f가 열린구간 (a, b)에서 주어졌다면 이 구간에서 최대값과 최소값을 가진다고 일반적으로 말할수 없다.

례 1 함수 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3$의 구간 $[-1, 2]$에서 최대값과 최소값을 구하여라.

(풀이) 먼저 $(-1, 2)$에서 극대값과 극소값을 구하자.

$$f'(x)=x^2-4x=x(x-4)$$

이므로 정류점은 $x_1=0, x_2=4$이다.

그런데 $x_2=4$는 구간 $(-1, 2)$밖의 점이므로 버린다.

$$-1<x<0 \text{ 에서 } f'(x)>0$$

$$0<x<2 \text{ 에서 } f'(x)<0$$

이므로 $x=0$은 f의 극대점이고 극대값은 $f(0)=3$

$(-1, 2)$에서 f의 극소점은 없다. 두 끌점 -1과 2에서의 함수값을 구하면

$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2+3=\frac{2}{3},\quad f(2)=\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+3=-2\frac{1}{3}$$

이리하여 구간 $[-1, 2]$에서 주어진 함수 f의

$$\text{최대값 } f(0)=3,\ \text{최소값 } f(2)=-2\frac{1}{3}$$

례 2 두 변의 길이가 각각 45㎝, 24㎝인 직4각형모양의 철판이 있다. 네 귀에서 같은 크기의 바른4각형을 잘라내여 뚜껑이 없는 함을 만들려고 한다. 네 귀에서 얼마만한 크기를 잘라내면 그 체적이 가장 크게 되겠는가?

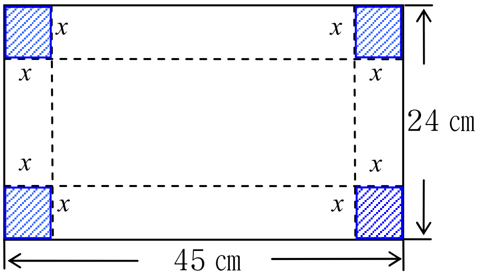


그림 2-35

(풀이) 네 귀에서 잘라내는 바른4각형의 한변의 길이를 x ㎝라고 하면 함의 체적 V는 다음과 같이 표시된다.

$$V=f(x)=(45-2x)(24-2x)x\ (0<x<12)$$

이리하여 문제는 구간 (0, 12)에서 이 함수의 최대값을 구하는 문제로 된다.

$$f'(x)=-2(24-2x)x+(45-2x)(-2)x+(45-2x)(24-2x)$$
$$=12(x^2-23x+90)=12(x-5)(x-18)$$

따라서 정류점은

$x_1=5,\quad x_2=18$ (그런데 18은 (0,12)밖의 점이므로 버린다.)

$x_1=5$의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 도함수 f'의 부호를 살피면

$x<5$에서 $\quad f'(x)>0$

$x>5$에서 $\quad f'(x)<0$

이므로 $x_1=5$는 구간 (0, 12)에서 함수 f의 유일한 극대점이며 극대값은 $f(5)=2450$

이리하여 한 변의 길이가 5㎝인 바른4각형을 네 귀에서 잘라내여 함을 만들면 된다. 이때 함의 체적은

$$V=2450\text{cm}^3$$

문 제

1. 열린구간에서 최대값이나 최소값을 안 가지는 함수의 실례를 들어보아라.

2. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하여라.

1) $f(x)=1-2x-x^2$, $[-2, 0]$ 2) $f(x)=x^4-2x^2+3$, $[-2, 2]$

3) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$, $[0, 4]$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(-\infty, +\infty)$

3. 직경이 d 인 원목에서 가장 큰 자름면을 가지는 직 4 각형보를 잘라내려고 한다. 자름면의 치수를 어떻게 잡으면 되겠는가?

4. 백철판으로 체적이 V인 통졸임통을 만들려고 한다. 통졸임통의 밑면의 반경과 높이와의 비를 어떻게 잡으면 백철판을 가장 많이 절약할수 있겠는가?

4. 미분과 함수값의 근사계산

1) 미분

함수 $y=f(x)$에서 독립변수의 증분 Δx에 대응하는 함수의 증분

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$$

를 직접 계산하자면 함수 f가 1차함수와 같이 간단하면 몰라도 조금만 복잡하여도 매우 품이 많이 든다.

이제 독립변수의 증분 Δx에 대응하는 함수의 증분 Δy의 근사값을 구하는 문제를 생각해보자.

함수 $y=f(x)$가 미분가능한 함수이면

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

으로부터 $|\Delta x|$가 충분히 작으면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx f'(x)$$

이로부터

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

와 같이 근사적으로 표시할수 있다.

이 근사식의 오른변의 식

$$f'(x)\Delta x$$

를 함수 f의 **미분**이라고 부르고 dy로 표시한다. 즉

$$dx = f'(x)\Delta x$$

이리하여 우의 근사식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$$

도함수의 그라프적의미로부터

$$f'(x)=\tan\alpha$$

라는것을 고려하면 그림 2-36에서 볼수 있는바와 같이

$$PN=\Delta y$$

$$PT=\tan\alpha\ MP=f'(x)\Delta x=dy$$

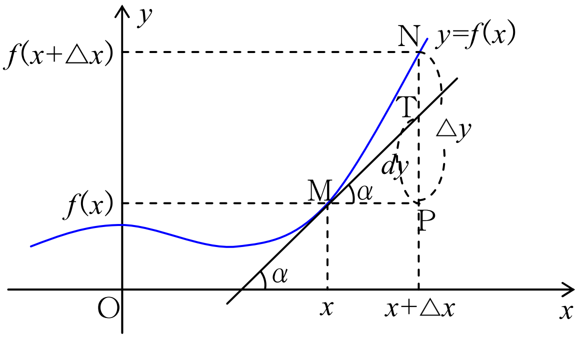


그림 2-36

이리하여 접점 M가까이에서 곡선을 접선으로 바꾸어 생각하였을 때 미분 dy는 독립변수의 증분 Δx에 대응하는 접선의 세로자리표의 증분 PT와 같다.

이로부터 근사식 $\Delta y\approx dy$는 함수의 증분을 접선을 표시하는 함수의 증분으로 바꾸어놓았다는것을 보여준다.

독립변수 x의 미분은 그 증분 Δx로 정의한다. 즉

$$dx=\Delta x$$

이 표시를 쓰면

$$dy=f'(x)dx$$

이로부터

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

즉 도함수는 함수의 미분과 독립변수의 미분의 상과 같다.

례 1 1) $d(x^3)=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x$ 또는 $d(x^3)=3x^2dx$

2) $d(5x+\sin x)=(5x+\sin x)'\Delta x=(5+\cos x)\Delta x$

또는 $d(5x+\sin x)=(5+\cos x)dx$

례 2 반경이 $R=4$㎝인 쇠로 된 구가 열을 받아 그 반경이 0.001㎝ 늘어났다. 이때 늘어난 구의 체적의 근사값을 구하여라.

(풀이) 구의 체적을 V로 표시하면

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

늘어난 체적을 △V라고 하면

$$\Delta V\approx dV=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'\Delta R=4\pi R^2\Delta R$$

그런데 $R=4$㎝, △R=0.001㎝이므로

$$\Delta V\approx 4\pi 4^2\cdot 0.001=0.064\pi\approx 0.201\,(\text{cm}^3)$$

문 제

1. 다음 함수의 미분을 구하여라.
   1) $y=3x^2+=2x+1$　　2) $y=x(x^2+1)$
   3) $y=(ax+b)^m$　　4) $y=e^x(\cos x+\sin x)$
2. 다음 함수의 증분의 근사값을 구하여라.
   1) $y=2x^3,\ x=2,\quad \Delta x=0.01$
   2) $y=2x^2-3x+2,\ x=1,\quad \Delta x=-0.001$
3. 반경이 20㎝인 원판이 열을 받아 그 반경이 20.01㎝로 되였다. 늘어난 원판의 면적의 근사값을 구하여라.

2) 함수값의 근사계산

근사식

$$\Delta y\approx dy=f'(x)\,\Delta x$$

에서 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$이므로 함수값에 대한 다음 근사식을 얻는다.

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

특히 $x=0$이면

$$f(\Delta x)\approx f(0)+f'(0)\Delta x$$

이 근사식을 써서 흔히 쓰는 몇개의 근사공식을 이끌어낼수 있다.

① $f(x)=x^\alpha\ (\alpha\in \mathrm{R})$이면

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^\alpha,\quad f'(x)\Delta x=\alpha x^{\alpha-1}\Delta x$$

이므로

$$(x+\Delta x)^\alpha\approx x^\alpha+\alpha x^{\alpha-1}\Delta x$$

특히 $x=1$이면

$$(x+\Delta x)^\alpha\approx 1+\alpha\,\Delta x$$

이 근사식에서 $\alpha = 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ 이면

$$(1+\Delta x)^2 \approx 1 + 2\Delta x$$
$$(1+\Delta x)^3 \approx 1 + 3\Delta x$$
$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}} \approx 1 - \frac{1}{2}\Delta x$$

례 3 1) $1.02^2 = (1+0.02)^2 \approx 1 + 2\cdot 0.02 = 1.04$

2) $\sqrt{0.964} = \sqrt{1-0.036} \approx 1 - \frac{1}{2}\,0.036 = 0.982$

3) $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{3^3 - 2} = 3\cdot\sqrt[3]{1 - \frac{2}{3^3}} \approx 3\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3^3}\right) \approx 2.986$

② $f(x) = \sin x$ 이면

$$f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x),\quad f'(x)\Delta x = \cos x\cdot\Delta x$$

이므로

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x\cdot\Delta x$$

특히 $x = 0$ 이면

$$\sin\Delta x \approx \Delta x$$

례 4 $\sin 1^\circ$ 의 근사값을 구하여라.

(풀이) 먼저 1°를 라디안수로 고치면

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

이것은 충분히 작은 수이다.
그러므로

$$\sin 1^\circ = \sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} \approx 0.0175$$

문 제

1. 다음 수의 근사값을 구하여라.

1) 1.005^3 2) $\sqrt{4.1}$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{15}}$

2. 다음 수의 근사값을 구하여라.

1) $\sin 10'$ 2) $\sin 29°$

련 습 문 제

1. 다음 함수의 증가구간과 감소구간을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y = 2 + 5x - x^2$ 2) $y = x^3 - 12x + 1$ 3) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$

4) $y = x + \dfrac{1}{x}$ 5) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$ 6) $y = \sin^2 x - x$

2. 다음 함수의 증가구간과 감소구간을 구하여라.

1) $y = \dfrac{2x}{\ln x}$ 2) $y = (x-1)^3(2x+3)^2$

3) $y = \dfrac{1}{10}x^2 - \ln x$ 4) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

3. 다음 함수는 수축전체에서 증가 또는 감소한다는것을 밝혀라.

1) $y = 3x^3 - x^2 + x - 1$ 2) $y = \sin x + \dfrac{\pi}{3}x$

4. 다음 함수의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y = x^2 - 3x + 1$ 2) $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 2$

3) $y = x + 2\sin x$ 4) $y = x^3(1-x)^2$

5) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 6) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$

5. 다음 함수의 극값을 구하여라.

1) $y = \left|x(x^2 - 1)\right|$ 2) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{(x-2)^2}$ 3) $y = (x+3)^2(x-1)^{\frac{2}{3}}$

4) $y = \sqrt{|x|}$ 5) $y = x\sqrt{2-x}$ 6) $y = \left|x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right|$

6. 함수 $y = \dfrac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}$ 는 점 $x = 1$ 에서 극대값 5를 가진다. 이때 a, b 의 값과 함수의 극소값을 구하여라.

7. 함수 $f(x)=2x+\frac{a}{2x-3}$ 의 극대값이 0 이 되도록 a 의 값을 구하여라.

8. 함수 $f(x)=2ax^3-6bx^2+6cx+9$ 가 $x=-1$ 에서 극대값을 잡고 $x=3$ 에서 극소값을 잡으며 극대값과 극소값의 차는 8이다. a, b, c 의 값을 구하여라.

9. 다음 함수의 증가구간, 감소구간, 극대, 극소를 따지고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $f(x)=x^4-2x^3+3$

2) $f(x)=x^2(3-x)$

3) $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$

4) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

10. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하여라.

1) $y=2x^3-9x^2+12x-3,\quad [0\ ,1]$

2) $y=x+\sqrt{x}\ ,\quad [0,\ 4]$

3) $y=x-\sqrt{8-x^2}\ ,\quad [-2\ ,2]$

4) $y=1+36x+36x^2-2x^3,\ [-10\ ,4]$

11. 다음 명제들에서 옳은것을 갈라내여라.

1) $f'(x)=0$ 인 점 x의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 함수의 증가, 감소는 서로 바뀐다.

2) $f'(x)=0$인 점을 가지지 않는 함수는 늘 증가(감소)한다.

3) 극대값은 극소값보다 작지 않다.

4) 함수의 최소값은 극소값들속에 있다.

5) 주어진 구간에서 꼭 하나의 극대점(극소점)을 가지는 함수는 그 점에서 최대값(최소값)을 가진다.

6) 뜻을 가지는 점으로서 미분불가능한 점과 정류점이 없으면 극점도 없다.

12. 반경이 R인 반원에 내접하는 직4각형가운데서 면적이 가장 크게 되는것을 구하여라.

13. x, y 자리표축에 평행인 변을 가지는 직4각형을 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 내접시키되 그 면적을 가장 크게 하여라.

14. 반경이 R인 구에 체적이 가장 큰 원기둥을 내접시켜라.

15. 처음속도 v_0 으로 땅면에 수직되게 쏘아올린 물체의 운동경로는 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ 이다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

16. 가로자름면이 직4각형인 보의 세기는 가로자름면의 너비와 높이의 2제곱에 비례한다. 직경이 d인 원목으로 세기가 가장 큰 직4각형자름면보를 만들려면 보의 가로자름면의 값을 어떻게 잡으면 되겠는가?

17. 다음 함수의 미분을 구하여라.

1) $y=(1+x^2)^3$ 2) $y=\tan 4x$ 3) $y=\ln\cos x$

4) $y=e^x\ln x$ 5) $y=\ln\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$ 6) $y=\sqrt{\arcsin 2x}+a^{-x}$

18. 다음 함수의 증분과 미분을 구하여라.

1) $y=3x^2-x,\quad x=1$에서 $\Delta x=0.02$

2) $y=x^3-3x,\quad x=-1$에서 $\Delta x=-0.001$

19. 다음 함수값의 근사값을 구하여라.

1) $f(x)=5x^2-2x+1,\quad f(2.01)$ 2) $f(x)=-3x^3+2x,\quad f(-1.99)$

20. 다음 수의 근사값을 구하여라.

1) $\sqrt[3]{21.1}$ 2) $\frac{1}{1.024^2}$ 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{9.09}}$

21. 다음 수의 근사값을 구하여라.

1) $\sin 30°1'$ 2) $\cos 46°$

22. 다음 근사식을 이끌어내여라.

1) $\tan\Delta x\approx\Delta x$ 2) $\ln(1+\Delta x)\approx\Delta x$ 3) $e^{\Delta x}\approx 1+\Delta x$

23. 흔들이의 주기 T는 공식 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 로 정해진다. 여기서 l은 흔들이의 길이이고 g는 중력가속도를 표시한다. l을 0.5% 늘일 때 T는 약 몇% 느는가?

복습문제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{3n+2}\cdot\frac{2n^2}{n^2+n-1}\right)$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{5+3^n}{2-3^n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ 4) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n}\right)$

2. 반경이 R인 원에 바른4각형을 내접시키고 이 바른4각형에 또 원을 내접시킨다. 이런 과정을 계속할 때 나오는 원들의 면적의 합, 바른4각형들의 면적의 합을 구하여라.

3. 다음 함수의 극한이 있는가?

1) $\lim_{x\to 5}\frac{3x}{x^2-25}$ 2) $\lim_{x\to 0}x\cos\frac{2}{x^2}$

4. 다음 함수의 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+2}$ 2) $\lim_{n\to\infty}\sin^n x$ 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin x-1}{n\sin x+1}$

5. 다음 함수는 어디서 련속이고 어디서 불련속인가?

1) $f(x)=\dfrac{3}{4-x^2}$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-3}, & x\neq 3\\ 2, & x=3\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

6. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=\dfrac{a}{ax^2+bx+c}$

2) $f(r)=\dfrac{1}{r^2}$

3) $y=\left|x^2-2\right|$

4) $y=\left|x^2-6x+8\right|$

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=-af'(a)+f(a)$임을 증명하여라.

8. 포물선 $y=2x^2$ 과 곡선 $y=x^3+2x^2-1$ 의 사귐점에서 곡선 $y=x^3+2x^2-1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

9. 점 $(2,\ -1)$을 지나며 곡선 $y=x^2-4$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

10. 점 $(-1,\ -3)$을 지나 포물선 $y=x^2-4x+1$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

11. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=(x^3-2x)^5$

2) $s=(t^2-t+1)^4$

3) $\theta=\dfrac{(2\varphi^2-1)^2}{\varphi^2}$

4) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

5) $y=2\cos(3x-1)\sin 2x$

6) $f(\varphi)=-\cot^2\varphi$

7) $y=\tan\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)+\tan 3$

8) $\theta=\sin^2 2\varphi$

9) $y=\dfrac{x}{\sin x^2+\cos x^2}$

10) $y=x^2\sin(\sin x)$

11) $y=\ln^2(1+\cos x)$

12) $y=\sin x^2 e^{\cos x}$

13) $y=x^2e^{-2x}$

14) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

15) $y=\left(\arccos\dfrac{1}{x+1}\right)^3$

16) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

17) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$

18) $y=a^{arc\cot\sqrt{x}}$

19) $y=e^{\arcsin x}$

20) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

12. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=(\ln x)^x$ 　　　2) $y=x^{\frac{1}{x}}$

3) $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ 　　　4) $y=(\cos x)^{\sin x}$

13. 다음 식들에서 $y=y(x)$이다. y'를 구하여라.

1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 　　　2) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

14. 어떤 점에서 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프에 그은 접선이 x축과 45°의 각을 이루는가?

15. 다음 함수의 지적된 계수의 도함수를 구하여라.

1) $y=x^2-3x+5$, $y''=?$, $y''(0)=?$ 　　　2) $y=3-x^3$, $y'''=?$

3) $y=\frac{1}{x^3}$, $y'''=?$ 　　　4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $y''=?$

5) $y=\sqrt{1+\sin x}$, $y''=?$ 　　　6) $y=\sin^3 x\cos 3x$, $y''=?$

7) $y=\ln(1+x)$, $y^{(n)}=?$ 　　　8) $y=e^{ax}$, $y^{(n)}=?$

16. 어떤 물체가 법칙 $s=-\frac{1}{6}t^3-3t^2-5$에 따라 직선운동을 한다. 가속도가 령으로 되는 순간을 정하여라. 이때 속도는 얼마인가?

17. $y=\cos e^x+\sin e^x$가 다음 관계식에 맞는다는것을 증명하여라.

$$y''-y'+ye^{2x}=0$$

18. $y=\left|x^3\right|$의 2계도함수를 구하여라. $y''(0)$이 있는가?

19. 다음 함수의 증가, 감소구간을 구하여라.

1) $y=3x^5-25x^8+60x-30$ 　　　2) $y=\frac{x^2}{x+1}$

3) $y=x^2\ln x^2$ 　　　4) $y=3x^3+5x^2+3x-1$

20. 다음 함수의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y=3x^5-25x^3+60x-30$ 　　　2) $y=\frac{x^2}{x+1}$

3) $y=(x-1)\sqrt{3x-2}$ 　　　4) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

21. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하여라.

1) $y=\sin x+\cos x \quad (0\le x<2\pi)$

2) $y=x-2\sin x \quad (0\le x<2\pi)$

22. 함수 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 다음것들을 구하여라.

1) x축에 평행인 접선을 가질 필요충분조건

2) 극대값과 극소값을 가질 필요충분조건

3) 어데서나 증가하는 함수이기 위한 필요충분조건

23. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+3ax+a$ 가 극값을 가지기 위한 a의 범위와 $f(x)$의 극값을 구하여라.

24. 함수 $f(x)=x^3-3x-1$과 $g(x)=x^3+ax^2+b$ 가 각각 같은 극대값과 극소값을 가지도록 a, b의 값을 정하여라.

25. 도함수를 써서 푸는 현실문제를 하나 만들고 풀어라.

상 식

오일레르의 과학연구활동

과학의 력사가 기록하고있는 큰 발견이나 발명들은 그 어느것이든지 결코 쉽게 이루어진것이란 없다. 그 갈피마다에 기록되여있는 하나하나의 공식이나 리론들에는 사람들의 고심어린 탐구와 노력이 깃들어있다. 이것은 한생을 고스란히 과학연구사업에 바친 오일레르(1707년-1783년)의 경우를 놓고보아도 그렇게 말할수 있다.

오일레르는 자기 생애의 전기간 886건의 론문을 썼는데 그가운데서 근 400건은 그가 맹인이 되여 사망하기 전까지 쓴것이라고 한다. 오일레르의 론문들은 수학, 력학, 천문학, 기술공학, 철학 등 넓은 범위를 포괄하고있으며 그 가치에 있어서도 매우 의의있고 독창적인것이다.

오늘의 대수학과 미적분학교과서에 들어있는 내용의 절반이상은 오일레르가 창조한것이다.

그의 저작들가운데서 대표적인 몇가지를 뽑아보면 다음과 같다.

① 《무한소해석개론》 전 2권(1748년)

② 《미분학》 전 3권(1755년)

③ 곡선의 극대, 극소에 관한 연구(1744년)

제 3 장. 부정적분



부정적분

치환적분법과 부분적분법

여러가지　함수의 적분

제 1 절. 부 정 적 분

1. 부정적분의 의미

어떤 물체가 운동법칙 $S=F(t)$에 따라 직선운동을 할 때 그 순간속도는

$$v=\frac{dS}{dt}=F'(t)$$

였다. 이제 물체의 운동속도 $v=f(t)$를 알고 운동법칙 $S=F(t)$를 구하는 문제를 생각해보자. 이 문제는

$$\frac{dF}{dt}=f(t)$$

에 맞는 $F(t)$를 구하는 문제로 된다.

이와 같이 물체의 운동속도를 알고 그 물체가 운동하는 법칙을 알아내는 문제는 미분법의 거꿀문제 즉 함수 F의 도함수 f를 알고 F를 구하는 문제로 된다.

> 함수 F의 도함수가 f일 때 즉
> $$F'(x)=f(x)$$
> 일 때 F를 함수 f의 원시함수라고 부른다.

례 1 $(x^2)'=2x$이므로 $F(x)=x^2$은 $f(x)=2x$의 원시함수이고
$(x^2+3)'=2x$이므로 $F(x)=x^2+3$도 $f(x)=2x$의 원시함수이다.

례 2 $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$, $\left(\frac{1}{3}x^3+0.3\right)'=x^2$ 이므로 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+0.3$ 들은 다 $f(x)=x^2$의 원시함수이다.

문 제

1. 함수 F가 함수 f의 원시함수로 된다는것을 따져보아라.

   1) $F(x)=4-\cos x$, $f(x)=\sin x$ 2) $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-5$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

   3) $F(x)=\sin^2 x$, $f(x)=\sin 2x$

2. 다음 함수 f의 원시함수 F를 구하여라.

   1) $f(x)=x$ 2) $f(x)=x^3+x$ 3) $f(x)=1$ 4) $f(x)=\cos x$

3. 다음 함수들가운데서 $f(x)=2x$의 원시함수를 갈라내여라.

$$x^2,\quad x^2+1,\quad 2,\quad \frac{1}{2}x^2,\quad x^2-0.1,\quad x^2+1$$

주어진 함수의 원시함수는 하나만이 아니라 무수히 많다.

일반적으로 F 가 f 의 원시함수이면 임의의 상수 c 에 대하여 F$(x)+c$ 모양의 함수는 f 의 원시함수이다.

이때 f 의 원시함수는 다 $\mathrm{F}(x)+c$ 모양의 함수로 표시되는가 하는 문제가 나선다.

이제 F 가 f 의 한 원시함수이고 G 가 f 의 임의의 원시함수라고 하면

$$[\mathrm{G}(x)-\mathrm{F}(x)]' = \mathrm{G}'(x)-\mathrm{F}'(x)=f(x)-f(x)=0$$

그런데 도함수가 0 인 함수는 상수뿐이므로

$$\mathrm{G}(x)-\mathrm{F}(x)=c$$

이로부터

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+c$$

이리하여 F 가 f 의 원시함수이면 f 의 모든 원시함수는

$$\mathrm{F}(x)+c \text{ (} c \text{ 는 상수)}$$

모양을 가진다.

함수 f 의 한 원시함수를 F 라고 할 때

$$\mathrm{F}(x)+c \quad (\ c \text{는 임의의 상수})$$

를 함수 f의 **부정적분**이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$\int f(x)dx$$

여기서 $\int$ 를 **적분기호**, f 를 **피적분함수**, x 를 **적분변수**, c 를 **적분상수**라고 부른다

$$\mathrm{F}'=f \Leftrightarrow \int f(x)dx=\mathrm{F}(x)+c$$

례 3 1) $(x^2)' = 2x \Leftrightarrow \int 2xdx = x^2 + c$

2) $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 \Leftrightarrow \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{c}$

례 4 자유락하하는 물체의 속도는 공기의 저항을 무시하면 $v=gt$ 이므로 그 물체가 운동하는 법칙 S=F(t)는 $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)' = gt$ 이므로

$$\mathrm{S}=\int gtdt=\frac{1}{2}gt^2+c$$

그런데 여기서 c는 임의의 상수이므로 이것은 무수히 많은 법칙을 나타낸다. 이가운데서 하나의 법칙을 정하자면 상수 c를 정하기 위한

조건을 주어야 한다. 례를 들어 물체가 떨어지는 거리 S와 시간 t를 물체가 떨어지기 시작하는 순간부터 잰다고 하면 $t=0$일 때 S=0 즉

$$S(0)=0$$

이므로

$$S(0)=\frac{1}{2}g\cdot 0^2+c=0$$

이로부터 $c=0$

이리하여 이 경우에 물체의 운동은

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

이라는 법칙으로 정해진다.

문 제

1. 다음 함수의 원시함수를 구하여라.

   1) 0 2) $5x$ 3) $-x^3$ 4) e^x

2. 다음 부정적분을 구하여라.

   1) $\int dx$ 2) $\int e^x dx$ 3) $\int \sin x dx$ 4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

   여기서 $\int dx$는 $\int 1dx$를, $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$는 $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$를 표시한다.

3. 어떤 점의 속도가 법칙 $v=9.8t-0.003t^2$에 따라 변한다. $t=0$과 $t=5$사이에 점이 움직인 거리를 구하여라. $t=5$일 때 이 점의 가속도를 구하여라.

4. 함수 $f(x)$에 대해 $f'(x)+4x-3=0$, $f(1)+f(-1)=0$이 성립할 때 $f(x)$를 구하여라.

2. 적분법

함수의 부정적분을 구하는것을 그 함수를 **적분한다**고 말하며 부정적분을 구하는 산법을 **적분법**이라고 부른다.

함수 $f(x)$를 적분한다는것은 그 뜻으로 보아 미분하여 $f(x)$가 되는 함수 $F(x)$를 구하는것이다.

이리하여 도함수공식으로부터

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^\alpha \quad (\alpha\neq -1) \Leftrightarrow \int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$$

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$

$$(e^x)'=e^x \Leftrightarrow \int e^x dx=e^x+c$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x \Leftrightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$(\sin x)' = \cos x \Leftrightarrow \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$(\cos x)' = -\sin x \Leftrightarrow \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

기본적분공식

(1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

(2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

(8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

(10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

부정적분의 정의와 미분법의 규칙으로부터 다음과 같은 부정적분의 기본성질((1), (2))과 적분계산규칙((3), (4))을 얻을수 있다.

(1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

(2) $\int f'(x)dx = f(x) + c$

(3) $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$ (k는 상수)

(4) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

(증명) (1), (2)는 부정적분의 정의로부터 곧 나온다.

(3), (4)는 $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x)+c \Leftrightarrow \mathrm{F}'(x)=f(x)$라는 관계를 쓰면 다음과 같이 곧 증명된다.

(3) $\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$이므로

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$이다.

(4) $\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x)$

이므로 $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

간단한 함수들은 기본적분공식과 적분계산규칙을 써서 직접 적분할수 있다.

례 1 (1) $\int (2x+\cos x)dx = \int 2xdx + \int \cos xdx = 2\int xdx + \int \cos xdx$

$$= 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + c_1 + \sin x + c_2 = x^2 + \sin x + c(c = c_1 + c_2)$$

(2) $\int \left(x^2 - 3e^x + 5\right) dx = \int x^2 dx - 3\int e^x dx + 5\int dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + c_1 - \left(3e^x + c_2\right) + 5x + c_3$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 3e^x + 5x + c \ \left(c = c_1 - c_2 + c_3\right)$$

적분을 여러번 할 때 적분상수는 매번 쓰지 않고 마감적분을 한 다음 하나만 쓰면 된다.

례 2 1) $\int \left(x^5 + \sqrt{x}\right)dx = \int x^5 dx + \int \sqrt{x}dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

2) $\int \frac{3x^2+x+2}{x^2}dx = \int \left(\frac{3x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)dx = 3\int dx + \int \frac{dx}{x} + 2\int x^{-2}dx$

$$= 3x + \ln|x| + 2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = 3x + \ln|x| - \frac{2}{x} + c$$

례 3 1) $\int \left(2^x - 5\sin^2\frac{x}{2}\right)dx = \int 2^x dx - 5\int \frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}\sin x + c$

2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$

$$= x - \arctan x + c$$

례 4 어떤 곡선의 점 (x, y)에서 이 곡선에 그은 접선의 방향결수가 $k = 1-x$ 이다. 곡선이 점 (1, -5)를 지난다는것을 알고 그 방정식을 구하여라.

(풀이) 구하려는 곡선의 방정식을 $y=f(x)$라고 하자. 도함수의 기하학적의미에 의하여

$$y'=1-x$$

두 변을 적분하면

$$\int y'dx=\int(1-x)dx$$

$$y=x-\frac{x^2}{2}+c$$

그런데 곡선은 점 (1, -5)를 지나므로

$$-5=1-\frac{1^2}{2}+c,\ c=-\frac{11}{2}$$

따라서 구하려는 곡선은 다음과 같은 포물선이다.

$$y=x-\frac{x^2}{2}-\frac{11}{2}$$

문 제

1. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int\left(x^{12}-5x^6\right)dx$　　2) $\int\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

3) $\int\frac{2x^2+x+2}{x}dx$　　4) $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$

2. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int\left(x^3-5\sin x\right)dx$　　2) $\int\left(1+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$　　3) $\int(2\tan x+1)\cos x dx$

4) $\int\left(\frac{1}{x^2}-4\sin x\right)dx$　　5) $\int\left(3^x-2^{x+1}\right)dx$　　6) $\int\frac{2+x^2}{1+x^2}dx$

련 습 문 제

1. 다음 같기식에 맞는 함수 $f(x)$를 구하여라.

1) $f'(x)=2x^3$　　2) $f'(x)=(1-3x)^2$　　3) $\int f(x)dx=x^3-5x^2+c$

2. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int 5x^3dx$　　2) $\int\left(-x^5\right)dx$　　3) $\int x(x-1)^2dx$

4) $\int(2-\theta)(\theta+1)d\theta$　　5) $\int\left(ax^2+bx+c\right)dx$　　6) $\int(x-2)^3dx$

7) $\int\frac{dr}{r^2}$　　8) $\int\left(\frac{3}{\sin^2 t}-\frac{2}{\cos^2 t}\right)dt$

3. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)x^2dx$　　2) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$　　3) $\int\frac{1-x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

4) $\int\frac{3u^2-1}{u}du$　　5) $\int\frac{v-\sqrt[3]{v}}{\sqrt{v}}dv$　　6) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

7) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$　　8) $\int\left(x^{10}-10^x\right)dx$　　9) $\int\left(2a^{\varphi}-3e^{\varphi}\right)d\varphi$

10) $\int\left(x+\frac{2^x}{3^x}\right)dx$　　11) $\int\frac{x^2-3}{1+x^2}dx$　　12) $\int\tan^2 xdx$

4. 함수 $f(x)=x-x^2$의 원시함수가운데서 다음 조건에 맞는것을 구하여라.

1) x=0 일 때 그 값이 0 이다.

2) x=1 일 때 그 값이 -1 이다.

5. 다음 조건에 맞는 함수 $f(x)$를 구하여라.

1) $f'(x)=1-x,\ f(0)=1$　　2) $f'(x)=(2x-1)(2-x),\ f(1)=3$

3) $f'(x)=\sin x+\cos x,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

6. $v=\mathrm{R}t+a\sqrt{t}$ 의 속도로 어떤 점이 움직인다. t=0과 t=4사이에 점이 움직인 거리를 구하여라. t=4일 때 이 점의 가속도를 구하여라.

7. 직선운동을 하는 물체의 가속도가 $a=0.6t^2+0.8t+0.5$ 이다. 운동을 시작하여 1초 지나서 속도는 $v=2.1\mathrm{m/s}$, 지나온 거리는 S=1.933m였다. 2초 지난 순간의 속도와 첫 2초동안에 지나간 거리를 구하여라.

8. 어떤 곡선의 점 M(x, y)에서 그은 접선의 방향결수가 k=2x+3이다. 곡선이 점 (0, 1)을 지난다는것을 알고 그 방정식을 구하여라.

제 2 절. 치환적분법과 부분적분법

1. 치환적분법

기본적분공식을 써서 직접 적분할수 없거나 적분하기 힘든 부정적분에서 적분변수를 다른것으로 적당히 바꾸면 쉽게 적분될 때가 있다.

부정적분 $\int f(x)dx$에서 적분변수 x를 다음과 같이 바꾸자.

$$x=\varphi(t)$$

이때 합성함수의 미분법규칙에 의해

$$\frac{d\left(\int f(x)dx\right)}{dt}=\frac{d\left(\int f(x)dx\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

이므로 다음 적분공식을 얻는다.

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

이 공식에 의한 적분방법을 **치환적분법**이라고 부른다

치환적분공식은 형식상 x자리에 $\varphi(t)$를 넣고 dx자리에는 미분 $dx=\varphi'(t)dt$를 넣어 적분 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$로 계산하게 되여있다.

이것은 부정적분의 표시 $\int f(x)dx$에서 기호 dx는 형식상 x의 미분을 표시한다는것을 보여준다.

례 1 $\int (2x+1)^3 dx$를 구하여라.

(풀이) $2x+1=t$ 즉 $x=\frac{t-1}{2}$ 로 바꾸면

$(2x+1)^3=t^3$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로 치환적분공식에 의하여

$$\int (2x+1)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+c = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + c$$

례 2 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx$를 구하여라.

(풀이) $\sqrt{x^3+5}=t$ 즉 $x^3+5=t^2$으로 바꾸자. 이 경우에 x를 t에 관해서 표시하자면 한 공정 더 계산해야 한다. 그런데 치환적분공식에서 기호 dx가 형식상 x의 미분과 같다는것을 고려하면

$$3x^2dx = 2tdt\,,\quad dx = \frac{2t}{3x^2}dt \quad \text{이므로}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx = \int \frac{x^2}{t}\cdot\frac{2t}{3x^2}\cdot dt = \frac{2}{3}\int dt = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+5}+c$$

문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int (1-2x)^5 dx$ 2) $\int \frac{1}{4+t}dt$ 3) $\frac{2}{(u+1)^3}du$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{5x-1}}dx$ 3) $\int \sin 5\theta d\theta$ 4) $\int e^{3\varphi}d\varphi$

3. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{1}{1-x^2}dx$　　2) $\int \sqrt[3]{3x-2}dx$　　3) $\int \sin(3\theta-2)d\theta$

다음 공식이 성립한다는것을 증명하여라.(4-5)

4. $\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}5(ax+b)+c$

5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = 1\text{n}|f(x)|+c$

례 3 $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ 를 구하여라.

(풀이) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

$\frac{x}{a}=t$ 즉 $x=at$ 로 바꾸면

$dx=adt$ 이므로

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{1+t^2}dt = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\arctan t + c = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

례 4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ 를 구하여라.

(풀이) 뿌리기호를 없애기 위하여 다음과 같이 특수한 치환을 한다.

$$\sqrt{x^2+a}=t-x,\ t=x+\sqrt{x^2+a}$$

이때 $x^2+a=t^2-2tx+x^2,\ x=\frac{t^2-a}{2t}$

$$\sqrt{x^2+a}=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t}$$

$$dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+a}{t^2}dt$$

따라서

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+a}{t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = 1\text{n}|t|+c = 1\text{n}\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c$$

례 5 $\int \sqrt{1-x^2}dx$ 를 구하여라.

(풀이) 이 경우에는 뿌리기호를 벗기는 방향에서 변수를 $x=\sin t$ 로 바꾸면

$1-x^2=1-\sin^2 t=\cos^2 t,\ dx=\cos t\,dt$ 이므로

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt=\int\cos^2 t dt$$

$\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ 이므로

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+c$$

그런데 $t=\arcsin x$

$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2x\sqrt{1-x^2}$ 이므로

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$$

례 6 $\int\cos^2 x\sin x dx$ 를 계산하여라.

(풀이) $\cos x=t$ 로 바꾸면

$$-\sin x dx=dt,\ dx=-\frac{1}{\sin x}dt$$

따라서

$$\int\cos^2 x\sin x dx=\int t^2\sin x\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}\right)dt=-\int t^2 dt=-\frac{t^3}{3}+c=-\frac{1}{3}\cos^3 x+c$$

문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$　2) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$　3) $\int\frac{dx}{2^2+x^2}$

4) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$　5) $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$　6) $\int\frac{dx}{3x^2-2x+1}$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-2}}dx$　2) $\int\sqrt{4-x^2}dx$　3) $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

4) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$　5) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$　6) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$

3. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\sin^2 x\cos x dx\ (\sin x=t)$　2) $\int\tan x dx\ (\cos x=t)$

3) $\int\cot x dx\ (\sin x=t)$　4) $\int\sin^6 x\cos x dx\ (\sin x=t)$

5) $\int\sin^2 x\cos^3 x dx\ (\sin x=t)$　6) $\int\cos^3 2x\sin^3 x dx\ (\cos x=t)$

2. 부분적분법

함수 $u=u(x),\ v=v(x)$ 가 미분가능하다고 하자. 이때

$$(uv)'=uv'+u'v$$

두 변을 적분하면

$$uv+c=\int uv'dx+\int u'vdx$$

이로부터

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx+c$$

상수 c 를 적분 $\int u'vdx$ 에 포함시켰다고 보면 다음 공식을 얻는다.

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$

이 공식에 의한 적분방법을 **부분적분법**이라고 부른다.

부분적분공식은 적분 $\int uv'dx$ 의 계산을 적분 $\int u'vdx$ 의 계산으로 넘긴다. 그러므로 이 두번째 적분이 첫째 적분보다 쉽게 계산할수 있는 경우에 널리 쓰인다.

례 1 $\int x\cos xdx$ 를 구하여라.

(풀이) $u=x,\ v'=\cos x$ 로 보면

$u'=1,\ v=\sin x$ 이므로

$$\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{\cos x}dx=\underset{u}{x}\,\underset{v}{\sin x}-\int \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{\sin x}dx$$

따라서

$$\int x\cos xdx=x\sin x+\cos x+c$$

례 2 $\int x\arctan xdx$ 를 구하여라.

(풀이) $u=\arctan x,\ v'=x$

$$u'=\frac{1}{1+x^2}\ ,\quad v=\frac{x^2+1}{2}$$ 이므로

$$\int x\arctan xdx=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2+1}{2}dx=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+c$$

례 3 $\int x^2\ e^{-2x}dx$ 를 구하여라.

(풀이) $u=x^2,\ v'=e^{-2x}$ 로 보면

$u' = 2x,\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ 이므로

$$\int x^2 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx$$

두번째 적분에서 $u = x,\ v' = e^{-2x}$ 로 보고 다시 부분적분을 하면

$$\int x^2 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c$$

문 제

1. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int x\sin xdx$ 2) $\int xe^x dx$ 3) $\int x\cos 2xdx$ 4) $\int x\ln xdx$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \ln xdx$ 2) $\int \arctan xdx$ 3) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

4) $\int x^2 \cos xdx$ 5) $\int x^2 \sin 2xdx$ 6) $\int x^2 e^{3x}dx$

련 습 문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int (ax+b)^m dx$ 2) $\int \cos(ax+b)dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$ 4) $\int \frac{dx}{3-4x}$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$ 6) $\int \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$ 7) $\int e^{-2x+3}dx$ 8) $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

2. 치환적분법으로 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$ 2) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$ 3) $\int \sin^3 x\cos xdx$ 4) $\int \cos^5 x\sin xdx$

5) $\int xe^{x^2}dx$ 6) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ 7) $\int \cos^5 3x\sin 3xdx$ 8) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

9) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}dx$ 10) $\int \cos^5 x\sin^2 xdx$ 11) $\int \sin^3 3x\cos^2 3xdx$

3. 다음 공식이 성립한다는것을 증명하여라.

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

4. 3번의 공식을 써서 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 2) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

5. 부분적분법으로 다음 적분을 구하여라.

1) $\int x(\sin 5x - 1)dx$ 2) $\int x\operatorname{arc}\cot x dx$ 3) $\int x\ln(x^2-1)dx$

4) $\int x\ln^2 x dx$ 5) $\int \ln(1+x)dx$ 6) $\int (x^2+x)\ln(x+1)dx$

6. 부분적분법으로 다음 적분을 구하여라.

1) $\int x^2 \ln x dx$ 2) $\int x^3 \sin x dx$ 3) $\int e^x \sin x dx$ 4) $\int e^x \cos x dx$

제 3 절. 여러가지 함수의 적분

1. 분수식의 적분

례 1 $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-2)}dx$ 를 구하여라.

(풀이) 피적분함수를

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

와 같이 변형한다.

A, B를 정하기 위하여 오른변을 통분하고 두 변의 분자를 비교하면

$$2x+1 = A(x-2) + B(x+1)$$

이것은 늘같기식이므로

$x=-1$ 일 때 $2(-1)+1 = -3A,\ \ A = \frac{1}{3}$

$x=2$ 일 때 $2\cdot 2+1 = 3B,\ \ B = \frac{5}{3}$

따라서 $\frac{2x+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-2}\right)$ 이므로

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-2)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-2| + c$$

참분수식은 분모가 1차식 또는 2차식 또는 그것들의 제곱인 참분수식들의 합으로 분해된다.

례를 들어 다음과 같다.

$$\frac{4x^3+2x+7}{(x+1)(x-3)^3(x^2+x+2)^2}$$
$$=\frac{\mathrm{A}}{x+1}+\frac{\mathrm{B}}{(x-3)^3}+\frac{\mathrm{C}}{(x-3)^2}+\frac{\mathrm{D}}{x-3}+\frac{\mathrm{E}x+\mathrm{F}}{(x^2+x+2)^2}+\frac{\mathrm{G}x+\mathrm{H}}{x^2+x+2}$$

이와 같이 분해하는것을 참분수식을 **부분분수분해한다고** 말한다.

례 2 $\mathrm{I}=\int\frac{5x^2-x+8}{x(x^2+4)}dx$ 를 구하여라.

(풀이) 피적분함수는 참분수식이다.

이 분수식을 부분분수분해하면

$$\frac{5x^2-x+8}{x(x^2+4)}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+4}$$

오른변을 통분하면 두 변의 분모가 같아지므로 분자도 같아야 한다. 즉

$$\mathrm{A}(x^2+4)+(\mathrm{B}x+\mathrm{C})x=5x^2-x+8$$
$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2+\mathrm{C}x+4\mathrm{A}=5x^2-x+8$$

두 변에서 x 의 같은차마디의 결수들을 비교하면

(A+B)=5, C=-1, 4A=8

여기로부터 A=2, B=3, C=-1

따라서

$$\mathrm{I}=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3x-1}{x^2+4}\right)dx=2\ln|x|+3\int\frac{x}{x^2+4}dx-\int\frac{1}{x^2+4}dx$$
$$=2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c$$

례 3 $\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$ 를 구하여라.

(풀이) $\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$

$x-\frac{1}{2}=t$ 즉 $x=t+\frac{1}{2}$ 로 바꾸면

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\int\frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}t+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|-\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\frac{dx}{x^2-1}$ 2) $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ 3) $\int\frac{3x-1}{(2-x)(x-3)}dx$ 4) $\int\frac{x^2+1}{x(x+1)}dx$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ 2) $\int\frac{2x+3}{x^2-5x+6}dx$ 3) $\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$

3. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$ 2) $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

3) $\int\frac{4x-1}{(x+2)(x-3)^2}dx$ 4) $\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$

4. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\frac{x}{x^2+3x+2}dx$ 2) $\int\frac{5x+6}{3x^2-4x+1}dx$

3) $\int\frac{x}{2x^2-5x+1}dx$ 4) $\int\frac{2-3x}{x^2-6x+1}dx$

5. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$ 2) $\int\frac{x}{2x^2-x+1}dx$ 3) $\int\frac{3x+2}{x^2-3x+3}dx$

4) $\int\frac{x^3}{x^2+2x+3}dx$ 5) $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$ 6) $\int\frac{1}{x^3+1}dx$

2. 무리식의 적분

례 1 $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}} dx$ 를 구하여라.

(풀이) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}} dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}} dx$

x 의 분수지수 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ 의 최소공통분모를 구하면 12 이다.

$x = t^{12}$ 로 치환하면

$$dx = 12t^{11}dx$$

$$x^{\frac{2}{3}} = t^8, \quad x^{\frac{1}{4}} = t^3, \quad x^{\frac{1}{6}} = t^2$$

따라서

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}} dx = \int \frac{t^8 - t^3}{t^2} 12t^{11}dt = 12\int \left(t^{17} - t^{12}\right)dt = 12\left(\frac{t^{18}}{18} - \frac{t^{13}}{13}\right) + c$$

$$= \frac{2}{3}t^{18} - \frac{12}{13}t^{13} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{12}{13}x\sqrt[12]{x} + c$$

례 2 $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}}$ 를 구하여라.

(풀이) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}} = \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}$

$1 + x$ 의 분수지수 $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ 의 최소공통분모는 2 이다.

$1 + x = t^2$ 으로 치환하면

$$dx = 2tdt$$

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = t^3, \ (1+x)^{\frac{1}{2}} = t$$

따라서

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}} = \int \frac{2tdt}{t^3 + t} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2\arctan t + c$$

$$= 2\arctan\sqrt{1+x} + c$$

문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$ 2) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}$ 4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ 3) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

3. $\int \sin mx\cos nxdx$, $\int \cos mx\cos nxdx$, $\int \sin mx\sin nxdx$ 모양의 적분

이런 모양의 적분은 다음과 같은 삼각공식을 써서 피적분함수를 합 또는 차로 고치면 쉽게 적분된다.

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

례 1 $\int \sin 5x\cos 3xdx$ 를 구하여라.

(풀이) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$ 이므로

$$\int \sin 5x\cos 3xdx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 8xdx + \int \sin 2xdx\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 8x}{8} - \frac{\cos 2x}{2}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{16}(\cos 8x + 4\cos 2x) + c$$

례 2 $\int \sin 8x\sin 5xdx$ 를 구하여라.

(풀이) $\sin 8x\sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 13x)$

이므로

$$\int \sin 8x\sin 5xdx = \frac{1}{2}[\int \cos 3xdx - \int \cos 13xdx]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 13x}{13}\right] + c = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{26}\sin 13x + c$$

문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \sin 3x \sin 2x dx$　　2) $\int \cos 5x \cos 3x dx$

3) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{12}dx$　　4) $\int \cos 3x \sin\frac{x}{6}dx$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$　　2) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

3) $\int \sin^2 x \cos^2 xdx$　　4) $\int \sin^4 x \cos^4 xdx$

4. $\sin x$ 와 $\cos x$ 에 관한 분수식의 적분

$\sin x$ 와 $\cos x$ 에 관한 분수식의 적분은

$$\tan\frac{x}{2}=t$$

로 치환하면 t 에 관한 분수식의 적분으로 이끌어진다. 이때

$$x=2\arctan t,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

례 1 $\int\frac{dx}{\sin x}$ 를 구하여라.

(풀이) $\tan\frac{x}{2}=t$ 로 치환하면

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

례 2 $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ 를 구하여라.

(풀이) $\tan\frac{x}{2}=t$ 로 치환하면

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{2dt}{1+t^2+2t+1-t^2}$$

$$=\int \frac{2dt}{2(t+1)}=\int \frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+c$$

문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ 2) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$ 3) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$ 4) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$ 2) $\int \frac{\cot x}{\sin x+\cos x-1}dx$

3) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

련 습 문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{x^2}{x+2}dx$ 2) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$

3) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$ 4) $\int \frac{x^3+1}{(x-2)^2(x+1)(x-4)}dx$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{3x-1}{x^2+x-6}dx$ 2) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$ 3) $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$

4) $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$ 5) $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}dx$ 6) $\int \frac{dx}{a+bx^2}$ $(b\neq 0)$

3. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{dx}{x^4-1}$ 2) $\int \frac{x^6-1}{x^3-1}dx$ 3) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

4. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$　2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$　3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

4) $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}dx$　5) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

5. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \frac{dx}{\sin x\cos 2x}$　2) $\int \frac{\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$　3) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

4) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$　5) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$　6) $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$

6. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int \sin 5x\cos x dx$　2) $\int \sin^2 x\cos^2 5x dx$

3) $\int \cos^2 ax\cos^2 bx dx$　4) $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$

5) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$　6) $\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx$

복 습 문 제

1. 다음 함수 F가 f의 원시함수라는것을 따지여라.

1) $F(x)=|x|,\quad f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,+\infty)\\ -1, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$

2) $F(x)=x\cdot\frac{|x|}{2},\quad f(x)=|x|,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

2. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int 3ax^4dx$　2) $\int (2t^3-t^2)dt$　3) $\int \left(\frac{x^2}{4}-3x-\frac{1}{2}\right)dx$

4) $\int (2x-1)(2-3x)dx$　5) $\int (t-1)^3dt$　6) $\int \left(2u-3\sqrt{u}\right)du$

7) $\int (a+bx^3)^2dx$　8) $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$

3. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$　　2) $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$　　3) $\int \sin^5 x\cos xdx$

4) $\int \cos^2 x\sin xdx$　　5) $\int \tan^2 xdx$　　6) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

7) $\int \cos 3x\cos 4xdx$　　8) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{12}dx$

4. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int (e^{-x}+1)e^x dx$　　2) $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}}dx$　　3) $\int x\sqrt{x-2}dx$　　4) $\int \frac{dx}{x^2-49}$

5) $\int \sin(1nx)dx$　　6) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$　　7) $\int \cos x\cdot 10^{\sin x}dx$　　8) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

9) $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$　　10) $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$

5. x의 값에 관계없이 늘 $\int(2x+3)dx>0$이 성립하도록 적분상수 c를 정하여라.

6. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int f'(2x)dx$　　2) $\int x\,f''(x)dx$

새로 나온 수학 - 돌변론

프랑스의 수학자 똠(1923-)은 1960년대에 불련속현상, 비약현상을 묘사하고 해석할수 있는 새로운 수학 《돌변론》을 창시하였다.

미분, 적분과 같은 해석학은 상태의 련속적인 변화과정을 묘사하고 해석하는 수학이다. 그러나 창문에 돌이 맞는 순간 유리가 깨지는것, 올려뿜는 분수의 물줄기가 순간 정지되였다가 아래로 떨어지는것, 물이 갑자기 얼거나 증발하는것, 생물에서 세포의 발생과 증식 등과 같이 불련속적으로, 비약적으로 일어나는 현상은 지금까지의 수학으로는 풀수가 없었다. 이런 현상을 묘사하고 해석할수 있는 새로운 수학 《돌변론》이 나온것은 20세기 수학의 획기적인 사변으로 보고있다.

돌변론연구는 아직도 시작에 불과하다. 그런데 여기에는 고급한 수학도 알아야 하므로 공부를 많이 하지 않고서는 발을 들여놓기가 힘들다. 똠은 《돌변론》의 발견으로 1968년에 필즈상을 받았다.

돌변론이 나옴으로써 지금까지 해결하지 못하고있던 적지 않은 문제들이 해결되였다. 특히 생물에서 갑작변이 같은것은 돌변론으로써만 풀수 있는것이다.

제 4 장. 정적분과 그 응용

$S(x)$

$V(x)$

정적분

치환적분법과 부분적분법

정적분의 응용

제 1 절. 정적분

1. 정적분의 의미

구간 $[a, b]$에서 련속인 함수 f가 주어졌다고 하자. 늘 $f(x)\geq 0(a\leq x\leq b)$이라고 하면 이 함수의 그라프는 x축 웃쪽에 놓인다. 이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형을 **곡선제형**이라고 부른다.

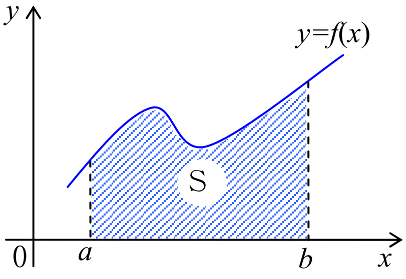


그림 4-1

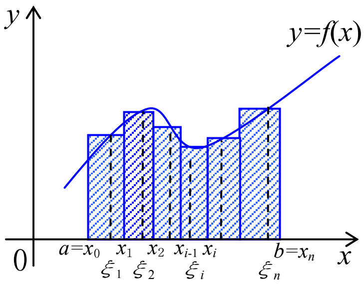


그림 4-2

곡선제형의 면적 S를 정하기 위하여 구간 $[a, b]$를 다음과 같은 점들로 n개의 부분으로 같게 나누자.

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b \quad \text{이때} \quad x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n} \; (i=1, 2, \cdots, n)$$

다음으로 $[a, b]$의 매개 나눔점 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$에서 y축에 평행인 직선을 그어 곡선제형을 n개의 작은 곡선제형으로 나누자.

이제 나눔구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 임의의 한 점 ξ_i를 잡고 x축 웃쪽에 놓이는 작은 곡선제형을 $[x_{i-1}, x_i]$를 밑변으로 하고 $f(\xi_i)$를 높이로 하는 직4각형으로 바꾸면 그 면적은

$$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

매개 나눔구간에 걸쳐서 이렇게 하면 주어진 곡선제형은 그림에서와 같이 n개의 직4각형들로 된 계단도형으로 바뀌여지고 그 면적은 다음 합과 같다.

$$\mathrm{S}_n=f(\xi_1)\frac{b-a}{n}+f(\xi_2)\frac{b-a}{n}+\cdots+f(\xi_n)\frac{b-a}{n}$$

합기호 $\sum$를 쓰면

$$\mathrm{S}_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

이 합은 구간 $[a, b]$를 같게 나눈 나눔구간의 개수 n과 점 $\xi_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$를 어떻게 잡는가에 따라 달라진다. 그러나 같게 나눈 나눔의 개수 n을 한없이 늘이면 구간 $[a, b]$는 무한히 잘게 나누어지고 이때 계단도형은 곡선제형에 얼마든지 가까와간다. 그러므로 곡선제형의 면적 S는 계단도형의 면적 S_n의 $n\to\infty$일 때의 극한으로 정할수 있다. 즉

$$\mathrm{S}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

이와 같이 끝없이 잘게 나눈 다음 그것을 다시 합해가는 수법에 따라 만든 우와 같은 모양의 극한계산은 곡선제형의 면적을 정하는데서뿐만아니라 일, 압력 등 실천적으로 나서는 많은 량들을 정하는데서도 하게 된다. 그러므로 우에서와 같은 모양을 가진 합의 극한을 따로 잘 연구하여두면 매개 구체적인 경우에 매우 편리하게 써먹을수 있다.

이제 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 주어졌다고 하자. 이때 $f(x)$는 부수값을 잡아도 좋다.

구간 $[a, b]$를 다음과 같은 점들로 n개의 부분으로 같게 나누자.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

여기서 $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ 을 Δx 로 표시하자.

매개 나눔구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 임의로 한 점 ξ_i를 잡고 다음과 같은 합을 만들자.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$$

이 합을 함수 f의 **적분합**이라고 부른다.

적분합 S_n은 구간을 같게 나눈 나눔구간의 개수 n과 $[x_{i-1}, x_i]$에서 점 ξ_i를 어떻게 잡는가에 따라 달라진다. 그러므로 극한

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

는 점 ξ_i를 어떻게 잡는가에 관계된다.

만일 그 길이가 충분히 작은 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 임의로 잡은 두 점 ξ_i', ξ_i''에서의 함수값 $f(\xi_i')$, $f(\xi_i'')$가 큰 차이를 가진다면 우의 적분합의 극한은 ξ_i를 어떻게 잡는가에 따라 달라질것이다. 그러나 f가 련속함수일 때 함수값 $f(\xi_i')$, $f(\xi_i'')$는 $[x_{i-1}, x_i]$의 길이가 충분히 작기만 하면 거의 같으므로 적분합의 극한은 아무런 ξ_i를 잡아도 다 같은 극한을 가지게 된다.

함수 f가 $[a, b]$에서 련속이면

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

는 ξ_i를 어떻게 잡는가에 관계없이 늘 있으며 그 극한은 같다.

이 극한을 련속함수 f의 a에서 b까지의 정적분이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

여기서 a를 적분의 아래끝, b를 적분의 웃끝, f를 피적분함수, x를 적분변수라고 부른다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

적분기호를 쓰면 앞에서 본 곡선제형의 면적은 다음과 같이 표시된다.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

우에서 적분이 웃끝 b가 아래끝 a보다 큰 경우 즉 $a<b$인 경우의 정적분을 정의하였다.

적분의 웃끝 b가 아래끝 a보다 작거나 같은 경우는 다음과 같이 정의한다.

$a=b$ 이면 $\int_a^b f(x)dx = 0$

$a>b$ 이면 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

례 $\int_0^1 xdx$를 계산하여라.

(풀이) 구간 [0, 1]을 다음과 같은 점들로 n개의 부분으로 같게 나누자.

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1$$

이때 $\Delta x=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$의 매개 나눔구간 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$에서 한 점 ξ_i를 그 오른쪽 끝점으로 잡으면

$$\xi_i=\frac{i}{n} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

그리고 $f(x)=x$이므로

$$f(\xi_i)=\xi_i=\frac{i}{n}$$

따라서 적분합은

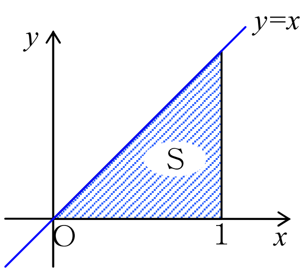


그림 4-3

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=(1+2+\cdots+n)\cdot\frac{1}{n^2}$$

그런데

$$1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}$$

이므로

$$S_n=\frac{(1+n)n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1+n}{2n}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\frac{1}{2}$$

이리하여

$$\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

이것은 그림 4-3 에서 빗선을 친 3 각형의 면적이다.

3 각형의 면적계산공식을 직접 써도 $\frac{1}{2}$이 나온다.

문 제

1. $\int_a^b f(x)dx,\ \int_a^b f(t)dt,\ \int_a^b f(u)du$ 등은 모두 같은 값을 가진다. 왜 그런가?

2. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^1 cxdx$ (c는 상수)　　2) $\int_0^1 x^2dx$

3. 다음 극한을 적분으로 표시하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+\cdots+n^4)$　　2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n}{1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

2. 미분적분학의 기본공식

정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 함수 f, 적분의 아래끝 a와 웃끝 b에 따라 정해지는 수이다.

이제 적분의 웃끝 b만을 변화시키면 그에 따라 적분값도 변한다. 그러므로 이때 정적분은 적분의 웃끝 b의 함수로 된다.

적분의 웃끝이 변한다는것을 뚜렷이 하기 위하여 b를 x로 바꾸고 이것과 적분변수를 헛갈리지 않도록 하기 위하여 적분변수를 t로 표시하면

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

이 사실은 련속함수는 늘 원시함수를 가진다는것을 보여준다.

정리 1. (련속함수의 원시함수존재정리)

함수 f가 $[a, b]$에서 련속이면 적분웃끝함수

$$S(x)=\int_a^x f(t)dx$$

는 $[a, b]$에서 f의 원시함수로 된다. 즉

$$S'(x)=f(x)$$

(증명) $f(x)\geq 0\ (a\leq x\leq b)$이라고 하고 증명하기로 한다. 이때

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a\leq x\leq b)$$

는 구간 $[a, x]$에서 x축 웃쪽에 놓이는 곡선제형의 면적을 표시한다.

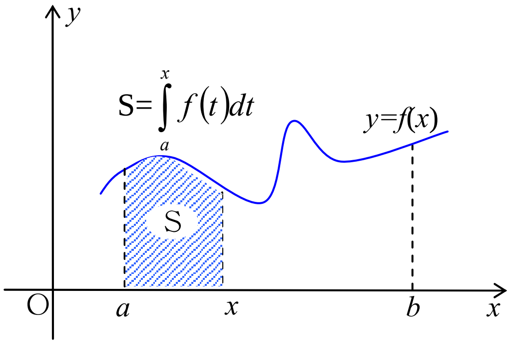


그림 4-4

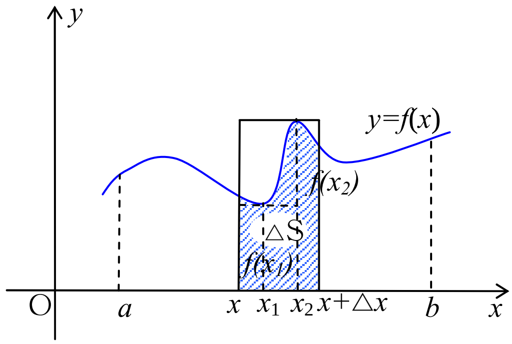


그림 4-5

$[a,\ b]$에 드는 임의의 점 x에서 서술을 간단히 하기 위해 정인 증분 Δx를 잡으면

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

는 그림에서 빗선을 친 작은 곡선제형의 면적과 같다. 그림에 표시한바와 같이 련속함수 f의 $[x, x+\Delta x]$에서의 최소값과 최대값을 각각 $f(x_1)$, $f(x_2)$라고 하면

$$f(x_1)\Delta x\leq \Delta S\leq f(x_2)\Delta x$$

그런데 $\Delta x>0$이므로

$$f(x_1)\leq \frac{\Delta S}{\Delta x}\leq f(x_2)$$

$\Delta x\to 0$이면 $x_1\to x,\quad x_2\to x$이고 f가 련속함수이므로 이때

$$f(x_1)\to f(x),\ f(x_2)\to f(x)$$

따라서 우의 안같기식으로부터

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$$

즉 $$S'(x) = f(x)$$ (증명끝)

이 사실을 써서 정적분과 부정적분사이의 관계를 보여주는 미분적분학의 기본공식을 증명할수 있다.

정리 2. (미분적분학의 기본공식)
함수 f 가 $[a, b]$에서 련속이면 f 의 임의의 원시함수 F에 대하여 다음 공식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(증명) f가 $[a, b]$에서 련속이므로

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

는 f의 한 원시함수이다. f의 임의의 원시함수 F를 잡자. 두 원시함수 $S(x)$와 $F(x)$는 상수차이를 가지므로

$$S(x)=F(x)+c$$

그런데 $S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ 이므로

$$S(a)=F(a)+c=0, \quad c=-F(a)$$

따라서

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

이제 $x=b$를 잡으면

$$S(b) = \int_a^x f(t)dt = F(b) - F(a)$$

이리하여

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(증명끝)

이 공식을 미분적분학의 기본공식 또는 뉴톤-라이브니쯔의 공식이라고 부른다.

미분적분학의 기본공식은 도함수와 적분사이의 관계를 지어주며 정적분계산을 피적분함수의 원시함수계산 즉 부정적분계산으로 돌림으로써 그 계산을 매우 간단하게 한다.

미분적분학의 기본공식은 도함수와 적분사이의 관계, 달리말하여 미분학과 적분학사이의 관계를 지어줌으로써 미분적분학을 하나의 체계로 완성시켰다는 의미에서 큰 의의를 가진다. 미분적분학의 기본공식을 보통 간단히 다음과 같이 표시한다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

례 1 1) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \int_1^3 x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\Big|_1^3 = \frac{-1}{2\cdot 3^2} - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

2) $\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi = 2\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin 0 = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2$

문 제

1. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_{-3}^5 x^3dx$ 2) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

2. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 2) $\int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$ 3) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 를 계산하는데는 미분적분학의 기본공식을 직접 쓸수 없다. 왜 그런가?

부정적분의 계산규칙과 미분적분학의 기본공식으로부터 다음과 같은 정적분의 계산규칙이 쉽게 얻어진다.

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k—상수)

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

례 2 1) $\int_0^3(-2x^2)dx=-2\int_0^3 x^2dx=-2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=-2\left(\frac{3^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=-18$

2) $\int_{-2}^3(3x^2-x)dx=3\int_{-2}^3 x^2dx-\int_{-2}^3 xdx=3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^3-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^3$

$$=(27+8)-\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)=32\frac{1}{2}$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)-(\sin 0-\cos 0)=(1-0)-(0-1)=2$$

정적분에서는 또한 다음과 같은 중요한 성질이 성립하며 적분계산에 널리 쓰인다.

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

사실 $F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(b)-F(c)+F(c)-F(a)$$

$$=F(x)\Big|_a^c+F(x)\Big|_c^b=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

례 3 $\int_0^3|x-2|\,dx$를 구하여라.

(풀이) $|x-2|=\begin{cases}-(x-2), & 0\le x\le 2\\ x-2, & 2\le x\le 3\end{cases}$ 이므로

$$\int_0^3|x-2|dx=\int_0^2[-(x-2)]dx+\int_2^3(x-2)dx=-\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3$$

$$=-\left(\frac{2^2}{2}-2\cdot2\right)+\left(\frac{3^2}{2}-2\cdot3\right)-\left(\frac{2^2}{2}-2\cdot2\right)=2\frac{1}{2}$$

례 4 곡선 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적(그림 4-6)을 구하여라.

(풀이) $S=\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1)+1=2$

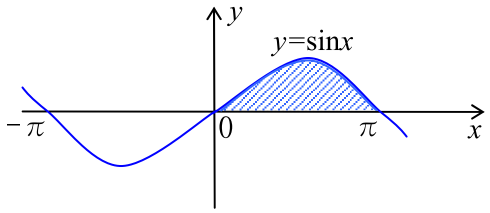


그림 4-6

문 제

1. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_1^5 (6x+1)dx$　　2) $\int_{-2}^{-1} (3x^2-6x+4)dx$　　3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

4) $\int_{-1}^1 |x|dx$　　5) $\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x}}dx$　　6) $\int_0^{2\pi} (1-\cos t)dt$

2. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_{-1}^2 |x|x\,dx$　　2) $\int_1^2 |x-1|^{\frac{1}{2}}dx$

련 습 문 제

1. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_{-1}^1 (x^2+2x-1)dx$　　2) $\int_1^3 \frac{2x^2+1}{\sqrt{x}}dx$　　3) $\int_1^4 (x-\frac{1}{x^3})dx$

4) $\int_2^3 (2x+1)^2 dx$　　5) $\int_0^\pi (t-a\sin t)dt$　　6) $\int_1^\pi \frac{dx}{x(x+3)}$

2. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^1 \sqrt{x+2}dx$　　2) $\int_1^{0.5} \frac{(1-\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}dx$　　3) $\int_{-\pi}^\pi \sin^2\frac{x}{2}dx$　　4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x dx$

5) $\int_0^1 (e^x-x)dx$　　6) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+3)}$　　7) $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1+\cos t+\cos^2 t)dt$

3. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_{-1}^{2}|2x-1|dx$ 2) $\int_{-6}^{4}|x^2-2x-3|dx$ 3) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$ 4) $\int_{-2}^{4}x^2|x|dx$

4. $f(x)=ax^2+bx+1$ 이 $f'(0)=1$, $\int_0^3 f(x)dx=1$ 에 맞도록 a, b 를 정하여라.

5. 포물선 $y=3+2x-x^2$ 과 직선 $x=1$, $x=2$ 및 x축에 의하여 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

6. 곡선 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ 와 x축에 의하여 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

제 2 절. 치환적분법과 부분적분법

1. 치환적분법

$[a, b]$에서 련속인 함수 f의 적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

를 계산하자.

이제 적분변수 x 를 $x=\varphi(t)$ 로 바꾸자. 여기서 φ 는 $[\alpha, \beta]$에서 미분가능한 함수이며 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ 이고 $a\le\varphi(t)\le b$ 라고 가정한다.

F를 f의 한 원시함수라고 하면 $\mathrm{F}[\varphi(t)]$는 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$의 원시함수이다.

그런데

$$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

한편 $\int_\alpha^\beta f[(\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\mathrm{F}[\varphi(\beta)]-\mathrm{F}[\varphi(\alpha)]=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$

이리하여 다음 공식이 성립한다.

치환적분공식

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

례 1 $\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx$ 를 구하여라.

(풀이) $1+x^3=t$ 라고 놓으면

$$3x^2dx = dt, \qquad dx = \frac{1}{3x^2}dt$$

그리고 $x=0$ 일 때 $t=1$

$x=1$ 일 때 $t=2$

이며 x 가 [0, 1]에서 변할 때 t 는 [1, 2]에서 변한다.

따라서

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx = \int_1^2 \frac{x^2}{t}\cdot\frac{1}{3x^2}dt = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \left(\frac{1}{3}\ln t\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 1 = \frac{1}{3}\ln 2$$

례 2 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$ 를 구하여라.

(풀이) $x = a\sin t$ 라고 놓으면

$$dx = a\cos t dt$$

$x=0$ 일 때 $t=0$

$x=a$ 일 때 $t=\frac{\pi}{2}$

이며 x 가 [0, a]에서 변할 때 t 는 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 변한다.

따라서

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2$$

문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int_0^2 (2x-3)^2 dx$　　2) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$　　3) $\int_0^1 (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

4) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{2}dx$　　5) $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx$　　6) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin^2\theta\, d\theta$　　8) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$　　9) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

2. 다음 갈기식이 성립한다는것을 증명하여라.

1) f가 짝함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

2) f가 홀함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2. 부분적분법

함수 $u=u(x)$, $v=v(x)$가 $[a, b]$에서 련속인 도함수를 가진다고 하자. 이때

$$(uv)' = u'v + uv'$$

두 변을 $[a, b]$에서 적분하면

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$$

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$$

이로부터 다음 공식을 얻는다.

부분적분공식

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

례 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$ 를 구하여라.

(풀이) $u=x$, $v'=\cos x$ 로 보면

$$u'=1, \quad v=\sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \frac{\pi}{2} - (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

례 2 $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ 를 구하여라.

(풀이) $u=\ln(1+x^2)$, $v'=1$ 로 보면

$$u' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad v=x$$

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \ln 2 - 2(x - \arctan x)\Big|_0^1 = \ln 2 - 2(1-\frac{\pi}{4}) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

문 제

1. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$ 2) $\int_0^2 xe^{-x}dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ 4) $\int_0^{e^2} (\ln x)^2 dx$

2. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$ 2) $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x dx$

련 습 문 제

1. 치환적분법에 의하여 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx$ 2) $\int_3^6 \sqrt{x-2}dx$ 3) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

4) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^3\theta\, d\theta$ 6) $\int_{-1}^2 \sqrt{4-x^2}dx$

7) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{(1-x)^5}dx$ 8) $\int_0^1 (2x+3)^{-\frac{1}{2}}dx$ 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta+\frac{\pi}{3})d\theta$

10) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx$ 11) $\int_0^1 e^{3-2x}dx$

2. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$ 2) $\int_{-3}^3 \frac{|x-3|+k}{|x-k|+3}dx$

3) $\int_0^2 (1-|x-1|)^3 dx$ 4) $\int_1^n (|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-n|)dx$, $n\in \mathrm{N}$

3. 부분적분법에 의하여 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^3 \ln(x+3)dx$　　2) $\int_0^\pi x\cos\frac{x}{a}dx$　　3) $\int_0^\pi x^2\cos 2xdx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin xdx$　　5) $\int_1^e x\ln xdx$

4. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f[a+(b-a)t]dt$ 가 성립한다는것을 증명하여라.

5. $\int_a^b f(kx+c)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+c}^{kb+c} f(x)dx$ ($k(k\neq 0)$, c는 상수)가 성립한다는것을 증명하여라.

제 3 절. 정적분의 응용

1. 면적계산

함수 f가 $[a, b]$에서 련속이고 늘 $f(x)\geq 0$일 때 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 곡선제형의 면적 S는 다음과 같이 표시되였다.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

이제 보다 일반적인 모양을 가진 평면도형의 면적을 계산하는 문제를 보기로 하자.

함수 f가 $[a, b]$에서 늘 $f(x)\leq 0$일 때 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형은 그림 4-7에서 보는바와 같이 x축아래에 놓인다.

이 도형을 x축에 관하여 대칭으로 옮기면 면적이 꼭같은 곡선제형을 얻는다.

따라서 구하려는 도형의 면적 S는 다음과 같다.

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

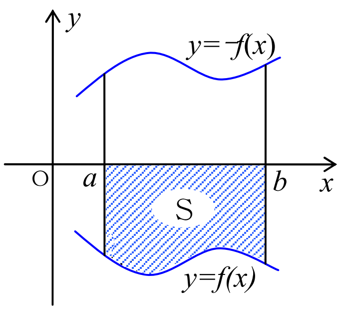


그림 4-7

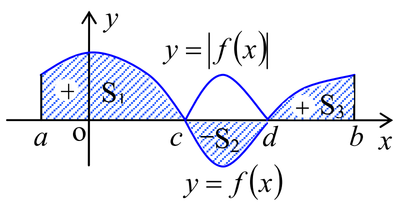


그림 4-8

일반적으로 구간 $[a, b]$에서 함수 f의 부호가 바뀌는 때에는 이 함수의 그라프와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x로 둘러싸인 도형의 면적 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

례를 들어 그림 4-8 과 같은 도형의 면적 S 는

$$S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

례 1 포물선 $y=x^2-2$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

(풀이) 포물선 $y=x_2-2$가 x축과 사귀는 점의 x자리표를 구하기 위하여 련립방정식

$$\begin{cases} y=x^2-2 \\ y=0 \end{cases}$$

을 풀면 $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$ 를 얻는다.

그런데 $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\,]$에서 늘 $y\le 0$

이므로 구하려는 도형의 면적 S는

$$S=-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^2-2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right)-\left(-\frac{-2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

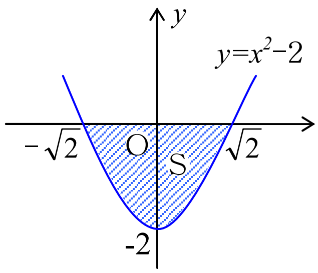


그림 4-9

례 2 반경이 r인 원의 면적을 구하여라.

(풀이) 원의 중심을 자리표원점으로 잡으면 원둘레의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2 \quad 또는\ y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

도형의 대칭성을 고려하면 구하려는 면적은

$$S=4S_1=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

여기서 S_1 은 1사분구에 놓이는 부분의 면적이다.

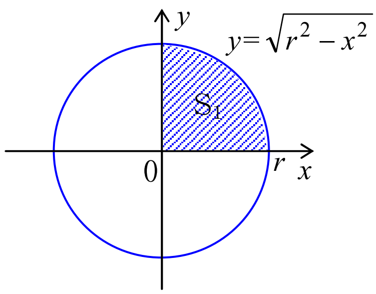


그림 4-10

오른변의 적분을 계산하기 위하여 $x=r\sin t$ 로 놓으면

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t dt\ =r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{r^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}$$

따라서 $S=\pi r^2$

례 3 곡선 $y=x^3$ 과 직선 $x=-1$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

(풀이) 함수 $y=x^3$ 은 [-1, 0]에서 $y\le 0$, [0, 2]에서 $y\ge 0$ 이다.

따라서 구하려는 도형의 면적 S 는

$$S=\int_{-1}^{2}|x^3|dx=\int_{-1}^{0}(-x^3)\,dx+\int_{0}^{2}x^3dx$$

$$=\left(-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{1}{4}+4=4\frac{1}{4}$$

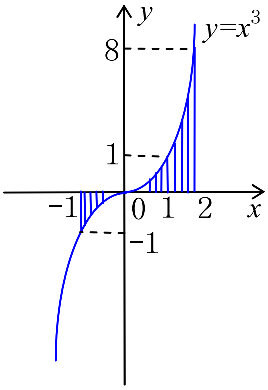


그림 4-11

문 제

1. 포물선 $y=-x^2+5x+4$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
2. 곡선 $y=\sin x\,(0\le x\le 2\pi)$와 x 축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

구간 [a, b] 에서 $f(x)\ge g(x)$이고 $g(x)\ge 0$일 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형의 면적 S는 그림에서 쉽게 알수 있는바와 같이 곡선 $y=f(x)$의 아래부분의 면적에서 곡선 $y=g(x)$의 아래부분의 면적을 던것과 같다.

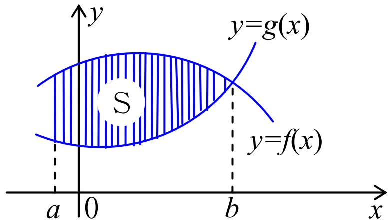


그림 4-12

즉

$$S=\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]dx$$

만일 [a, b]에서 $g(x)$가 늘 정이 아니면 적당히 큰 정수 c를 잡아 도형을 y축에 평행으로 c만큼 옮겨 도형이 x축웃부분에 놓이게끔 할수 있다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 각각 $y=f(x)+c$, $y=g(x)+c$로 옮겨진다.

따라서 이때

$$S=\int_{a}^{b}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]dx$$

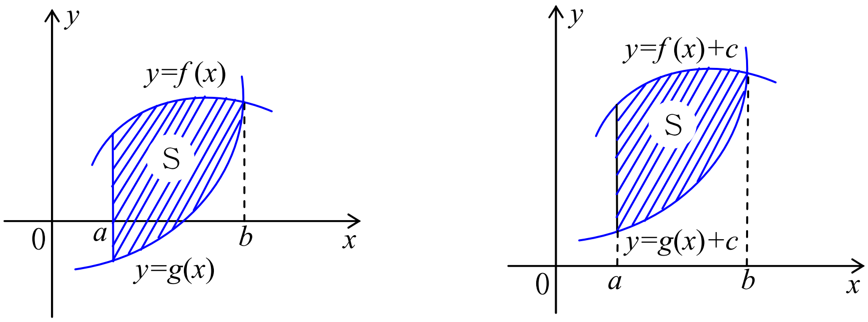


그림 4-13

이리하여 $[a, b]$에서 $f(x) \geq g(x)$일 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 면적 S는 일반적으로 다음 공식으로 계산된다.

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

례 4 포물선 $y=x^2+x-2$와 직선 $y=x-1$로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

(풀이) 포물선 $y=x^2+x-2$와 직선 $y=x-1$의 사귐점의 x자리표를 구하자.

련립방정식

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

을 풀면

$x^2+x-2=x-1$, $x^2-1=0$

$x_1=-1$, $x_2=1$

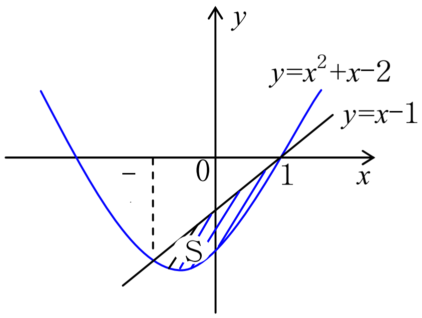


그림 4-14

그림 4-14에서 볼수 있는것처럼 $[-1, 1]$에서 직선 $y=x-1$은 포물선 $y=x^2+x-2$에 놓인다.

따라서 구하려는 도형의 면적 S는

$$S = \int_{-1}^{1} [(x-1) - (x^2+x-2)]dx = \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

례 5 포물선 $x = y^2$과 직선 $y = 2 - x$로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

(풀이) 포물선 $x = y^2$과 직선 $y = 2 - x$의 사귐점의 자리표를 구하자.

련립방정식

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

를 풀면 $y = 2 - y^2$

$$y^2 + y - 2 = (y+2)(y-1) = 0$$

$y_1=-2$, $y_2=1$

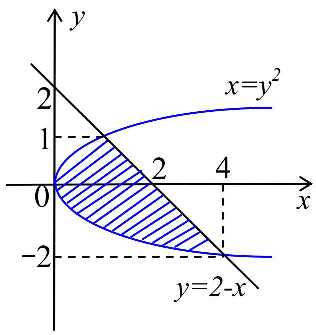


그림 4-15

y를 적분변수로 보면 구하려는 도형의 면적은

$$S = \int_{-2}^{1} [(2-y) - y^2]dy$$

$$= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4\frac{1}{2}$$

문 제

1. 다음 그림에서 빗선을 친 도형의 면적을 정적분으로 표시하여라.

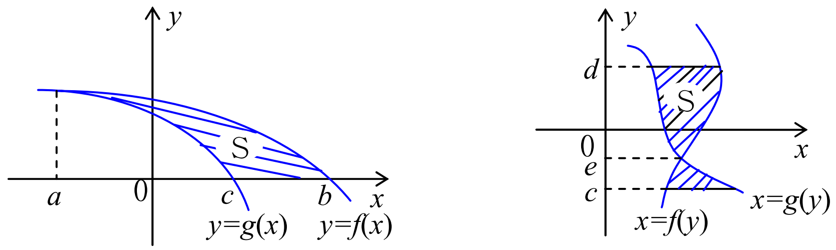


그림 4-16

2. 례 5를 적분변수 x에 관하여 적분하는 방법으로 풀어보아라.

3. 다음 도형의 면적을 구하여라.

1) 포물선 $y=2x^2$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 도형

2) 곡선 $y=x^2$과 $y^2=x$로 둘러싸인 도형

3) 포물선 $y^2=4x$와 $y^2=4-x$로 둘러싸인 도형

4) 두 곡선 $y=\sin 2x,\ y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$로 둘러싸인 도형

5) 두 곡선 $y=$ $y=\sin x,\ y=\cos x\ (0\le x\le \pi)$로 둘러싸인 도형

2. 체적계산

일정한 방향에 수직인 평면으로 립체를 잘랐을 때 생기는 자름면의 면적을 알수 있으면 립체의 체적을 정적분으로 계산할수 있다.

이제 일정한 방향을 x축으로 잡고 축의 임의의 점 x를 지나며 이 축에 수직인 평면으로 주어진 립체를 자르자.

이때 생기는 자름면의 면적 S는 x의 함수다. 즉 $S=S(x)$

이제 립체가 점 $x=a$와 $x=b$에서 수직으로 세운 두 평면사이에 끼워있다고 하고 그 체적을 정하는 문제를 생각해보자.

구간 $[a,\ b]$를 점

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

들로 n개의 부분으로 갈게 나누고 매개 나눔점에서 x축에 수직인 평면을 세워 립체를 자르면 n개의 작은 립체가 생긴다.

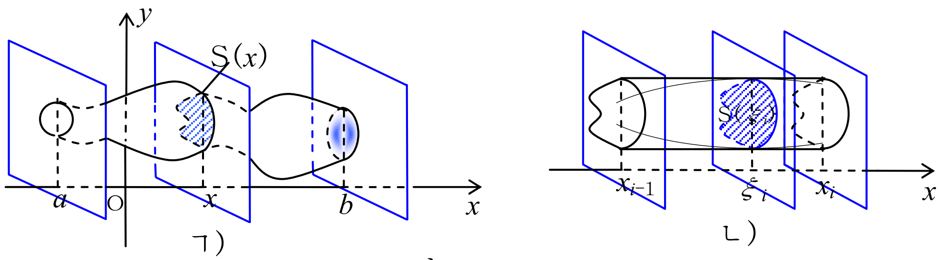


그림 4-17

나눔구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 임의의 한 점 ξ_i를 잡고 $[x_{i-1}, x_i]$사이에 끼운 작은 립체를 점 ξ_i에서의 자름면을 밑면으로 하고 $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$를 높이로 하는 기둥으로 바꾸자. 매개 나눔구간에 걸쳐서 이렇게 하면 주어진 립체는 작은 기둥으로 된 도형들의 합으로 바뀌고 그 체적은

$$\mathrm{V}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

와 같다.

이제 나눔점의 개수 n을 한없이 늘이면 $[a, b]$는 무한히 잘게 나누어지고 작은 기둥의 합으로 된 도형은 주어진 립체에 얼마든지 가까와간다.

그러므로 립체의 체적 V는 V_n의 $n\to\infty$일 때의 극한으로 정의할수 있다. 즉

$$\mathrm{V} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{V}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

이로부터

$$\mathrm{V} = \int_a^b \mathrm{S}(x)dx$$

특히 립체가 회전체이면 회전축에 수직인 평면으로 립체를 잘랐을 때 생기는 자름면의 면적을 쉽게 구할수 있다.

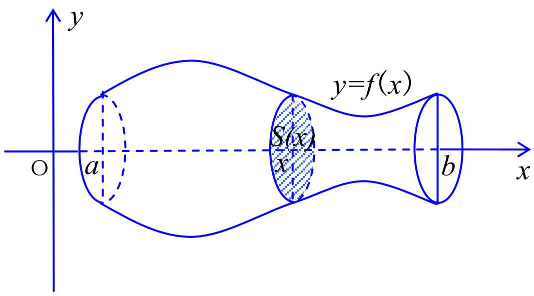


그림 4-18

구간 $[a, b]$에서 련속인 곡선 $y=f(x)$를 x축주위로 돌려서 생기는 회전체를 축에 수직인 평면으로 자를 때 그 자름면은 반경이 $|y|$인 원이다.

그러므로 자름면의 면적은

$$\mathrm{S}(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$$

따라서 회전체의 체적 V는

$$\mathrm{V} = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx$$

례 1 반경이 R인 구의 체적을 구하여라.

(풀이) 구는 자리표원점을 중심으로 하는 반원을 x축주위로 돌려서 생긴 회전체이다.(그림 4-19)

자리표원점을 중심으로 하고 반경이 R인 원둘레의 방정식은

$$x^2+y^2=R^2$$

따라서 $y^2=R^2-x^2$

이리하여 반경이 R인 구의 체적 V는 다음과 같이 계산된다.

$$V=\pi\int_{-R}^{R}y^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\pi(R^2x-\frac{x^2}{3})\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

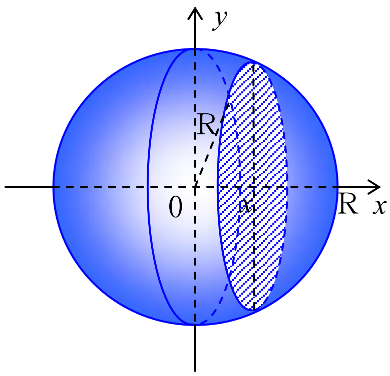


그림 4-19

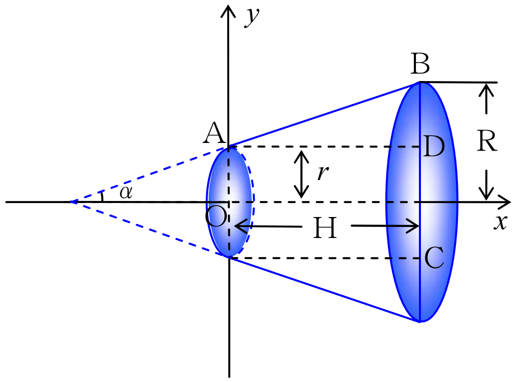


그림 4-20

례 2 아래밑면의 반경이 R, 웃밑면의 반경이 r, 높이가 H인 원뿔대의 체적을 구하여라.

(풀이) 그림 4-20에서와 같이 자리표축을 정하자.

선분 AB를 x축주위로 돌렸을 때 원뿔대가 생긴다.

직선 AB의 방정식을 $y=kx+b$라고 하면

$$b=OA=r,\quad k=\tan\alpha=\frac{DB}{AD}=\frac{R-r}{H}$$

이므로 $y=\frac{R-r}{H}x+r\ \ (0\le x\le H)$

따라서 원뿔대의 체적 V는 다음과 같이 계산된다.

$$V=\pi\int_{0}^{H}y^2dx=\pi\int_{0}^{H}(\frac{R-r}{H}x+r)^2dx=\frac{\pi H}{3(R-r)}(\frac{R-r}{H}x+r)^3\Big|_{0}^{H}$$

$$=\frac{\pi H(R^3-r^3)}{3(R-r)}=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$$

문 제

1. 곡선 $x=g(y)\ (c\le y\le d)$를 y축주위로 돌렸을 때 생기는 회전체의 체적 V는 다음 공식으로 주어진다는것을 설명하여라.

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d g^2(y)dy$$

2. 포물선 $y = x^2 + 1$, 두 직선 $x = -a$와 $x = a$로 둘러싸인 도형을 x축주위로 돌렸을 때 생기는 회전체의 체적을 구하여라.
3. 밑변 [0, 1]과 곡선 y=arcsin$x$로 둘러싸인 곡선제형을 x축주위로 회전시킬 때 생기는 회전체의 체적을 구하여라.
4. 원둘레 $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(0 < a < b)$를 x축주위로 돌려서 생기는 회전체(고리체)의 체적을 구하여라.

3. 물체의 변위와 물체가 지나간 거리계산

어떤 물체가 $v(t)$의 속도로 시간 $t = t_0$에서부터 $t = \mathrm{T}$까지 직선운동을 하였을 때 그 물체의 변위와 지나간 거리를 구하는 문제를 생각해보자.

시간구간 $[t_0, \mathrm{T}]$를 다음 점들로 n개의 부분으로 같게 나누자.

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \mathrm{T}$$

n을 크게 하여 $[t_{i-1}, t_i]$를 충분히 잘게 나누면 $[t_{i-1}, t_i]$가 매우 작은 구간으로 되므로 이 구간에서 속도는 거의 일정하다고 볼수 있다. 이 일정한 속도를 $[t_{i-1}, t_i]$의 임의의 한 순간 ξ_i에서의 속도 $v(\xi_i)$로 보면 t_{i-1}에서 t_i까지의 사이에서 물체의 변위는

$$v(\xi_i)\Delta t \ \left(\Delta t = \frac{\mathrm{T} - t_0}{n}\right)$$

에 가깝다. 그러므로 $[t_0, \mathrm{T}]$사이에서의 물체의 변위를 P로 표시하면

$$\mathrm{P} \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t$$

따라서 $\mathrm{P} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t$

로 정할수 있다. 이리하여

$$\mathrm{P} = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} v(t)dt$$

시간 $[t_0, \mathrm{T}]$사이에 물체가 지나간 거리를 구한다고 하면 그것은 t_{i-1}과 t_i 사이의 짧은 시간에 물체가 움직인 거리 $|v(\xi_i)|\Delta t$ 들의 합

$$\sum_{i=1}^{n} |v(\xi_i)|\Delta t$$

의 극한으로 된다.

따라서 이 시간사이에 물체가 지나간 거리S 는

$$\mathrm{S} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} |v(\xi_i)|\Delta t$$

이리하여

$$S=\int_{t_0}^{T}|v(t)|dt$$

례 어떤 물체가 속도 $v=2-2t$(㎧)로 직선운동을 한다. 운동을 시작하여 6초 지나면 물체의 자리가 어떻게 변하겠는가? 이사이에 물체가 지나간 거리를 구하여라.

(풀이) 6 초동안에 물체의 변위는

$$P=\int_0^6 v(t)dt=\int_0^6(2-2t)dt=(2t-t^2)\Big|_0^6=-24(m)$$

즉 부방향으로 24m 만큼 자리를 옮겼다.

6 초사이에 물체가 지나간 거리는

$$\mathrm{S}=\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^6|2-2t|dt$$

그런데

$0\le t\le 1$ 에서 $2-2t\ge 0$

$1\le t\le 6$ 에서 $2-2t\le 0$

이므로

$$\mathrm{S}=\int_0^6|2-2t|dt=\int_0^1(2-2t)2dt-\int_1^6(2-2t)dt=(2t-t^2)\Big|_0^1-(2t-t^2)\Big|_1^6$$
$$=1-(-25)=26(m)$$

문 제

1. 어떤 물체가 속도 $v=\cos\frac{\pi}{4}t$ 로 직선운동을 한다. t=0일 때 원점을 떠났다면 10초 지나서 이 물체는 어떤 자리에 있겠는가? 또 이사이에 물체가 지나간 거리를 구하여라.
2. 어떤 물체가 가속도 $a=t-2$㎨로 직선운동을 한다. t=0일 때 속도 20㎧로 원점을 떠났다면 t초 지나서 이 물체는 어떤 위치에 있겠는가?

4. 일계산

물체가 크기 F인 일정한 힘을 받아 힘이 작용하는 방향으로 L만큼 움직였을 때 힘이 한 일 A는 다음과 같다.

A=F L

그러나 힘 F 가 변하는 경우에는 일을 우에서와 같이 구할수 없다.

이제 x축방향으로 작용하면서 크기가 변하는 힘을 받아 어떤 물체가 $x=a$에서부터 $x=b$까지 움직였을 때 이 힘이 수행한 일을 구하는 문제를 생각해보자.

힘이 x축방향으로 향하고 매 점에서 크기가 달라지므로 힘은 점 x의 함수로 볼수 있다. 즉

$$F=F(x)\ (a\le x\le b)$$

이제 구간 $[a, b]$를 점

$$a=x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n=b$$

들로 n개의 부분으로 갈게 나누자. 이때 $[a, b]$를 충분히 잘게 나누면 나눔구간 $[x_{i-1}, x_i]$는 매우 작은 구간으로 되므로 이 구간에서 힘은 거의 일정하다고 볼수 있다. 따라서 이 구간에서 힘이 한 일은

$$F(\xi_i)\Delta x(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \Delta x = \frac{b-a}{n})$$

에 가깝다. 그러므로 구하려는 일 A는

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x$$

따라서 $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x$ 로 정할수 있다. 이리하여

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

례 1 한끝이 고정되여있는 어떤 용수철을 1cm 늘구는데 1N의 힘이 든다. 이 용수철을 5cm 늘굴 때 힘은 얼마의 일을 하겠는가?(그림 4-21)

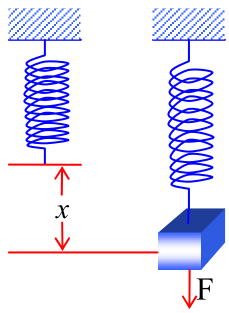


그림 4-21

(풀이) 휨성법칙에 의하여 힘 F는 늘어난 길이 x에 비례한다. 즉

$$F=kx$$

여기서 k는 비례결수다.

$x=0.01$(m)일 때 F=1(N)이므로

$$1=k\cdot 0.01,\ k=100$$

따라서 $F(x)=100x$

이리하여 구하려는 일 A는

$$A = \int_0^{0.05} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0.05} = 0.125(\text{J})$$

례 2 x축의 원점 O에 질량이 m인 질점이 놓여있다. 이때 x축의 x점에 놓여있는 단위질량을 가진 질점의 방향은 원점 O로 향하고 크기가

$k\dfrac{m}{x^2}$ 인 끌힘이 작용한다. 여기서 k는 비례결수다. 단위질량을 x축을 따라 점 $x=a$에서 $x=b$까지 가져갈 때 끌힘이 하는 일을 구하여라. 또 $x=a$에서 무한히 멀리 가져갈 때 끌힘이 하는 일을 구하여라.

(풀이) 단위질량을 점 a에서 점 b까지 가져갈 때 끌힘이 하는 일 A는

$$\mathrm{A}=\int_a^b k\frac{m}{x^2}dx=km\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^b=km\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

또한 점 a에서 무한히 멀리 가져갈 때 끌힘이 하는 일은

$$\mathrm{A}=\lim_{b\to\infty}\int_a^b k\frac{m}{x^2}dx$$

로 생각할수 있다. 이리하여

$$\mathrm{A}=\lim_{b\to\infty}\int_a^b k\frac{m}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}km\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{km}{a}$$

문 제

1. 피스톤이 작용하는 원통속에 기체가 들어있다. (그림 4-22) 피스톤의 밑면적은 S이다. 기체의 체적이 v_0에서 v_1까지 불어날 때 기체의 압력이 하는 일을 계산하여라. 기체의 압력 p와 체적 v사이에는 $pv=c$(c는 상수)라는 관계가 있다.

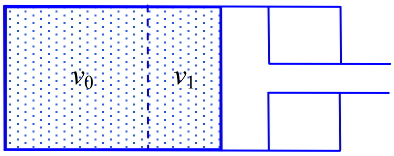


그림 4-22

2. 두 점전하 q_1과 q_2사이에 작용하는 힘은 $\mathrm{F}=k\dfrac{q_1q_2}{r^2}$이다. 여기서 r는 두 점전하사이의 거리이고 k는 비례결수다. 점전하 q_1을 고정시키고 그로부터 R_1만큼 떨어진 점에서부터 점전하 q_2를 q_1에서 R_2만 한 거리까지 가져갈 때 힘이 하는 일을 구하여라.

련 습 문 제

1. 포물선 $y=4-x^2$과 직선 $y=-x+2$ 및 x축에 의하여 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
2. 포물선 $y^2=9x$와 직선 $y=3x$로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
3. 두 포물선 $y=2x^2-x-3$과 $y=-x^2+2x+3$에 의하여 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
4. 곡선 $y=x^3$과 두 직선 $y=2x$, $y=x$로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
5. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$를 x축주위로 돌려서 생기는 립체의 체적을 구하여라. 또한 y축주위로 돌렸을 때 생기는 립체의 체적을 구하여라.

6. 곡선 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$를 x축주위로 돌려서 생긴 립체의 체적을 구하여라.

7. 곡선 $y=1-\sqrt{x}$와 두 자리표축으로 둘러싸인 도형을 x축 및 y축 주위로 각각 돌렸을 때 생기는 립체의 체적을 구하여라.

8. 물체가 속도 $v=6t-2t^2$cm/s로 직선운동을 하고있다. 이 물체가 운동을 시작하여 멎을 때까지 운동한 거리를 구하여라.

9. 물체가 속도 $v=2\sin\pi t$ cm/s로 직선운동을 하고있다. t=3에서부터 t=5.5까지 사이에 이 물체의 변위와 이 시간사이에 물체가 지나간 거리를 구하여라.

10. 길이 1m, 자름면의 반경이 2mm인 구리줄을 더 늘굴 때 장력이 하는 일을 구하여라. 길이가 l(m), 자름면의 면적이 S(mm^2)인 튐성체를 x(m) 더 늘굴 때 장력 F는 $\mathrm{F}=\frac{\mathrm{ES}}{l}x$로 주어진다. 여기서 E는 튐성결수이다.

11. 한끝이 고정된 용수철을 6N의 힘으로 잡아당겨 8cm 더 늘구었다. 이때 힘이 한 일을 구하여라.

복 습 문 제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int_1^3 (x+\frac{1}{x})^2 dx$ 2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 3) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{(x+1)^4}}dx$

4) $\int_0^\pi x^3\cos xdx$ 5) $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}(a>0)$ 6) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16^2-x^2}}$

7) $\int_{-1}^1 (x^2)^{\frac{1}{2}}(x+1)dx$ 8) $\int_{-2}^2 |x^2-1|dx$ 9) $\int_0^\pi |\sin\theta|d\theta$

10) $\int_0^4 |x^2-5x+6|dx$

2. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int_1^{10} \frac{dx}{x(x^2+3)}$ 2) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$

3. 다음 극한을 정적분으로 표시하고 계산하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+\cdots+n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 2) $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{(n^2+n)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(n^2+2n)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^2+n^2)^{\frac{1}{2}}}]$

4. $\int [f(x)]^2 dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$ 일 때 적분 $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$ 를 구하여라.

5. $f(x+t) = f(x)(x \in (-\infty, \ +\infty))$ 일 때 $\int_a^{a+t} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$ 이라는것을 증명하여라.

6. 다음것을 증명하여라.

1) $f(x) \geq 0 \ (a \leq x \leq b)$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2) $f(x) \leq g(x) \ (a \leq x \leq b)$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

7. 질점이 속도 $v(t)$ 로 직선운동을 한다. 그의 자리표는 다음 공식으로 구할수 있다는것을 증명하여라. (여기서 $x_0=x(t_0)$ 은 질점의 처음 자리표이다.)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

8. 질점이 가속도 $a(t)$ 로 직선운동을 한다. 그의 속도 $v(t)$ 는 다음 공식으로 구해진다는것을 증명하여라. (여기서 v_0 은 질점의 처음속도이다.)

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

9. 포물선 $y = x^2 - 3x$ 와 직선 $y + 3x - 4 = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

10. 포물선 $y^2 = 2x$ 는 원 $x^2 + y^2 \leq 8$ 의 면적을 어떤 비로 나누는가?

11. 포물선 $y^2 = 2px$ 와 직선 $x = a$ 로 둘러싸인 도형을 x축주위로 돌렸을 때 생기는 립체의 체적을 구하여라.

12. 곡선 $y^3 = 4x^2$ 과 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 도형을 y축주위로 돌렸을 때 생기는 립체의 체적을 구하여라.

13. 두 물체가 같은 시간에 같은 곳으로부터 각각 $v=3t^2$(m/s)과 $v=2t$(m/s)의 속도로 한 직선을 따라 직선운동을 시작하였다. 12초 지나서 이 물체들은 서로 얼마만한 거리에 떨어져있겠는가?

14. 로케트를 드림선방향으로 쏘아올렸다. 추진력이 일정할 때 로케트의 가속도는 다음 식으로 계산된다.

$$y = \frac{\mathrm{A}}{a - bt} (a - bt > 0)$$

로케트의 초기속도를 령이라고 할 때 t 시간 지난 후의 속도를 구하여라.

또한 $t=t_1$ 인 시각에 로케트는 얼마만한 높이에 올라가는가?

15. 정적분을 써서 푸는 물리문제를 하나 만들고 풀어라.

상 식

뉴톤과 라이브니쯔에 의한 미분적분학의 창시

오늘 미분적분학으로서 미분법과 적분법은 뗄래야 뗄수 없는 깊은 관계에 있지만 력사적으로는 전혀 다른 기원을 가지고있다. 미분법은 량의 변화에 관한 연구로부터 시작되였고 적분법은 곡선이나 곡면으로 둘러싸인 도형의 면적이나 체적을 구하는 문제로부터 시작되였다. 미분법과 적분법이 생겨난 과정은 다르지만 어느것이나 《무한》, 《극한》의 사상이 중심으로 되고있는것과 함께 한쪽의 방법을 거꾸로 하면 다른쪽의 방법으로 넘어가는것과 같이 밀접히 련관되여있다. 이것을 명백히 한것이 바로 뉴톤과 라이브니쯔이다.

뉴톤과 라이브니쯔는 미분적분학창시의 선구자들의 업적에 토대하여 독립적으로 미분법과 적분법을 하나의 학문으로 통일시킴으로써 대체로 완성된 미분적분학이 창시된것으로 본다.

뉴톤(1643년－1727년)은 17세기의 가장 유명한 영국의 수학자, 물리학자, 천문학자이다. 뉴톤은 오늘의 미분법에 해당한것을 《흐름률법》(method of fluxion)이라고 불렀다. 그의 리론에서 《흐름》(fluent)이라고 불리워지고 있는것은 운동에서 시간과 함께 변하는 량 즉 시간의 함수이다. 그리고 《흐름률》(fluent)이라고 하는것은 극히 짧은 시간동안의 흐름의 변화률로서 오늘날의 미분결수에 해당한다.

고대그리스시기로부터 시작하여 뉴톤 이전 시기의 모든 수학자들은 면적을 무한히 작은 불가분량의 합으로 생각하였으나 뉴톤은 면적의 흐름률을 확정해놓고 그로부터 본래 함수를 구하는 방법으로 즉 역흐름률법으로 면적을 구하는 방법을 내놓았다.

이와 같이 뉴톤은 여러가지 접선을 구하는 수법, 면적을 구하는 수법을 두가지 보편적수법인 《정흐름률법》(미분법)과 《역흐름률법》(적분법)으로 통일시켰다.

라이브니쯔(1646년－1716년)는 도이췰란드의 수학자, 철학자이다.

라이브니쯔는 곡선에 접선을 긋는다는 기하학적문제로부터 뉴톤의 흐름률에 대응하는 미분결수에 이르렀다. 라이브니쯔의 미분적분학은 《불가분량해석학》 또는 《무한소해석학》이라고 불리운다. 여기서는 《련속률》이라는 원리가 작용하고있는데 이것은 뉴톤의 극한개념의 역할을 하고있다.

라이브니쯔는 수학에서 기초의 중요성을 제창하고 기묘한 기호법을 완성하였다.

그는 미분법을 차의 계산, 적분법을 합의 계산으로 생각하고 미분기호 d (차〃diffence〃의 첫 글자), 적분기호 ∫(합 〃summa〃의 첫 글자를 우아래로 길게 늘인것)를 사용하였다. 미적분학의 창시는 수학을 불변량을 대상으로 하던 정적인 수학으로부터 변량을 연구대상으로 하는 동적인 수학으로 넘기였으며 수학발전력사에서 하나의 전환적계기를 열어놓은 인류과학발전에서 특이할만 한 사변이였다.

새로 나온 수학 - 카오스

산봉우리에서 돌을 굴릴 때 그 자리길을 예측한다고 하여도 처음 위치와 방향을 약간 변화시키면 그 자리길을 예측할수 없게 된다.

이처럼 처음조건을 약간 변화시킬 때 예측할수 없는 상태로 되는 것을 카오스현상이라고 부른다.

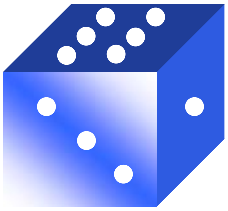
카오스(Chaos)란 말은 그리스어로 《혼돈》을 의미한다. 자연 및 사회현상에서 처음조건에 의해 질점의 위치가 결정되는 계를 결정론적계라고 부르며 브라운운동에서처럼 질점의 위치를 확정할수 없는 계를 비결정론적계라고 부른다.

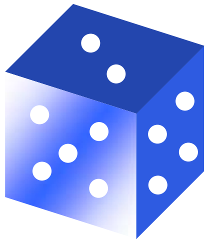
최근시기에 류체의 흐름을 연구하면서 외부적환경을 약간 변경시키면 란류가 생기는것을 통하여 결정론적계도 비결정론적계도 아닌 새로운 카오스계가 있다는것이 밝혀졌다.(1960년대)

카오스현상은 비선형미분방정식의 풀이와 련결되여있는데 21세기에 들어와 비선형현상이 수학의 중요한 연구대상으로 등장하면서 카오스연구는 현대수학의 중요한 연구분야로 되고있다.

콤퓨터와 수학적모형화리론의 발전으로 카오스리론은 매우 급속히 발전하고있는 현대응용수학의 핵심분야로 되고있으며 특히 류체력학, 항공력학, 분사구리론 등 류체의 흐름연구에서 중요한 역할을 하고있다.

제5장. 확률과 통계





$$P(A)=\frac{k}{n}$$

사건과 확률

우연량의 확률분포

통계자료처리

통계적추정과 예측

제1절. 사건과 확률

1. 사건과 그 산법

윷놀이를 할 때 윷가락을 던지면 《도》, 《개》, 《걸》, 《쑹》, 《모》가운데 어느 하나가 나온다.

윷가락을 던지는것과 같이 어떤 현상이 일어나도록 조건을 지어주는것을 시행, 《모》라든가 《개》와 같이 시행의 결과에 일어나는 현상을 **사건**이라고 부른다.

알아보기 1부터 10까지의 수가 하나씩 적혀있는 수자카드가 들어있는 통에서 아무렇게나 2개의 수자카드를 꺼낼 때 다음의 사건들이 일어날수 있는가?

1) 수들의 합이 2보다 작지 않을 사건
2) 수들의 합이 30과 같을 사건
3) 수들의 합이 10보다 작을 사건

> 시행의 결과 반드시 일어나는 사건을 확실한 사건, 절대로 일어나지 않는 사건을 불가능한 사건, 일어날수도 있고 일어나지 않을수도 있는 사건을 우연사건이라고 부른다.

확실한 사건을 Ω, 불가능한 사건을 ϕ로 표시하고 우연사건을 A, B, C, … 로 표시한다.

확률론에서는 주로 우연사건을 대상으로 한다.

이러저러한 시행의 결과로 나타나는 사건들은 서로 련관되여있으며 몇개의 사건들이 결합되여 새로운 사건이 생긴다.

그러므로 사건들의 산법을 고찰해야 한다.

합사건

시행의 결과에 두 사건 A와 B가운데 어느 한 사건이 일어나도 일어나는 사건을 두 사건 A와 B의 **합사건**이라고 부르고 $A\cup B$(또는 $A+B$)로 표시한다.

차사건

시행의 결과에 두 사건 A와 B가운데 A는 일어나고 B는 일어나지 않는 사건을 A와 B의 **차사건**이라고 부르고 $A\backslash B$ (또는 $A-B$)로 표시한다.

적사건

시행의 결과에 A와 B가 동시에 일어나면 일어나는 사건을 사건 A와 B의 **적사건**이라고 부르고 $A\cap B$(또는 AB)로 표시한다.

사건 A와 B에 대하여 사건 A가 일어나면 늘 사건 B가 일어날 때 사건 A는

사건 B에 포함된다고 말하고 A⊂B로 표시하며 A⊂B이고 B⊂A이면 A와 B는 같다고 말하고 A=B로 표시한다.

배반사건

두 사건 A, B에 대하여 $A \cap B = \phi$ 즉 적사건이 늘 불가능한 사건일 때 A와 B를 서로 배반이라고 부른다.

나머지사건

두 사건 A, B에 대하여 $A \cap B = \phi$, $A \cup B = \Omega$이면 B를 A의 나머지사건(또는 A를 B의 나머지사건)이라고 부르고 $\overline{A}$(또는 $\overline{B}$)로 표시한다.

례 어떤 함에 1등품, 2등품, 3등품이 섞여있다. 여기서 아무렇게나 한개를 꺼낼 때 1, 2, 3등품이 나올 사건을 A_1, A_2, A_3으로 표시할 때 다음 사건들은 어떤 사건인가?

$$A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2,\ \overline{A_3},\ A_1 \cup A_2 \cup A_3,\ \overline{A_1 \cup A_2}$$

(풀이) $A_1 \cup A_2$는 1등품 또는 2등품이 나올 사건이고

$A_1 \cap A_2$은 1등품도 나오고 2등품도 나올 사건인데 이것은 불가능하다.

$\overline{A_3}$은 3등품이 아닌것이 나올 사건이므로 $\overline{A_3} = A_2 \cup A_1$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$은 1, 2, 3등품가운데 어느 하나가 나올 사건이므로 확실한 사건이다.

$\overline{A_1 \cup A_2}$는 1등품이거나 2등품이 나오지 않을 사건이므로 $\overline{A_1 \cup A_2} = A_3$

문 제

1. 두 면에 각각 검은색과 흰색을 칠한 원판을 던지는 시행에서 다음의 사건은 어떤 사건인가?
   1) 검은색과 흰색이 동시에 나타날 사건
   2) 검은색이 나타날 사건
   3) 검은색이나 흰색이 나타날 사건
   4) 흰색이 나타날 사건
2. 다음 사건들은 어떤 사건인가?
   1) 도체에 전기가 흐르면 열이 발생한다.
   2) 보통온도에서 납땜은 녹는다.

3) 돌을 던지면 아래로 떨어진다.
4) 표준대기압에서 0℃이면 물은 언다.
5) 한 사람이 한번 사격하여 목표를 명중한다.

3. 어떤 제품이 합격품으로 되는 사건을 A, 불합격품으로 되는 사건을 B, 합격품가운데서도 1등품일 사건을 C, 1등품이 아닐 사건을 D로 표시하면 다음의 사건들은 어떤 사건들인가?
1) $A\cup B$, $A\cup C$, $B\cup C$ 2) $A\cap B$, $A\cap C$, $A\cap D$
3) $A\setminus B$, $A\setminus C$, $A\setminus D$

4. 세 사건 A, B, C에 대하여 어느 사건이 사건 $\overline{A\cup B\cup C}$ 인가?
1) 세 사건가운데서 적어도 한 사건은 일어나지 않는다.
2) 세 사건이 다 일어나는것은 아니다.
3) 세 사건이 다 일어나지 않는다.
4) 어느 한 사건이라도 일어난다.

5. 세 사건 A, B, C가운데서 두 사건만 일어날 때 일어난다고 보는 사건을 산법기호를 써서 식으로 나타내여라.

2. 사건의 확률

자연현상들가운데는 우연적인것이 적지 않으므로 자연을 정복하고 그것을 인민경제발전에 더 잘 리용하기 위해서는 실천과정에서 부닥치게 되는 각이한 우연현상들을 분석해야 하며 이러저러한 사건들이 일어날 가능성을 타산해야 한다.

확률의 통계적정의

한번의 시행에서 주목하는 사건이 나타나겠는가 나타나지 않겠는가는 단정할수 없다. 그러나 같은 시행을 여러번 반복할 때 사건의 출현은 어떤 일정한 합법칙성에 따른다는것을 알수 있다. 이 합법칙성을 통하여 그것이 나타날 가능성정도를 량적으로 평가할수 있다.

앞면과 뒤면이 구별되는 원판을 던질 때 앞면이 나타날 가능성을 고찰하기 위해 진행한 실험결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

던진 회수(n)	앞면출현수(k)	빈도률$\left(\frac{k}{n}\right)$
2 048	1 061	0.518 1
4 040	2 048	0.506 9
12 000	6 019	0.501 6
24 000	12 012	0.500 5
30 000	14 984	0.499 6
72 088	36 124	0.501 1

n번의 시행에서 사건 A가 k번 일어났다고 할 때 k를 사건 A의 **빈도수**, 비 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 **빈도률**이라고 부른다.

알아보기 원판을 던지는 시행에서

1) n이 커질 때 빈도률 $\frac{k}{n}$는 어떤 수에 가까와지는가?

2) 원판을 던질 때 앞면이 나타날 가능성을 얼마로 보아야 하겠는가?

> 많은 실험결과는 시행의 회수 n을 크게 하면 빈도률 $\frac{k}{n}$가 어떤 수 P에 가까와간다는것을 보여준다. 이 수 P를 사건 A의 **확률**이라고 부른다.

이렇게 확률을 정하는것을 **확률의 통계적정의**라고 부른다.

통계적방법으로 확률을 구하자면 시행을 수많이 되풀이해야 하는데 이렇게 하는것은 어려우므로 시행회수 n이 상당히 클 때의 빈도률 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 확률로 본다. 그러므로 이 확률은 어디까지나 근사값이다.

례 1 원판을 던지는 시행에서 앞면이 나타나는 사건의 빈도률 $\frac{k}{n}$는 n이 커짐에 따라 0.5에 접근한다.

따라서 이 사건의 확률은 P=0.5이다.

례 2 어느 공장에서 생산한 전구 2 000알가운데 수명이 3 000시간이상 되는것이 1 860알 들어있다. 이런 전구들이 들어있는 통안에서 아무렇게나 한개 꺼냈을 때 그것의 수명이 3 000시간이상일 확률을 구하여라.

$$P=\frac{1860}{2000}=0.93$$

문 제

1. 어떤 사수가 동일한 조건밑에서 사격을 진행한 결과 다음 표와 같은 성적을 얻었다면 명중확률은 얼마이겠는가? 사수는 매 사격에서 10발씩 쏘았다고 한다.

회수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
명중한 회수	9	9	10	10	10	8	9	9	10	10	9	8	7

2. 통안에 15개의 제품이 들어있다. 통안에서 아무렇게나 한개의 제품을 꺼내여 그것이 몇등품인가를 조사하고 다시 통안에 넣는다. 이렇게 500번 조사하였는데 1등품이 324번 나타났다. 1등품이 통안에 몇개나 있다고 볼수 있는가?

고전적정의

어떤 사건들에 대해서는 시행을 반복하지 않고 그 확률을 정할수 있다.

알아보기 주사위(그림 5-1)를 한번 던질 때 웃면에 i개의 눈이 나타나는 사건을 각각 $E_i(i=1, 2, \cdots, 6)$라고 표시하면

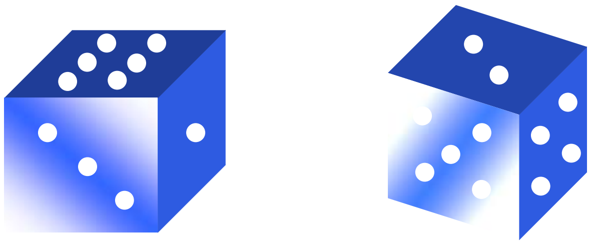


그림 5-1

1) 일어날수 있는 사건이 몇가지인가?
2) 사건 E_2이 나타날 가능성은 얼마인가? 사건 E_3이 나타날 가능성은 얼마인가?
3) E_i들가운데 한 사건이 일어날 때 다른 사건도 함께 일어나는 경우가 있는가?
4) 웃면에 짝수개의 눈이 나타나는 사건은 어떤 사건들로 이루어지는가?
5) 웃면에 3의 배수개의 눈이 나타나는 사건은 어떤 사건들로 이루어지는가?

한번의 시행에서 나타날수 있는 사건을 요소사건이라고 부른다.

이때 어떤 두 요소사건도 서로 배반이며 모든 사건들은 요소사건들로 이루어진다.

이제부터 한번 시행에서 나타날 가능성이 같은 n개의 요소사건이 일어나는 경우를 고찰하겠다.

례 3 윷가락을 던지는 시행에서 요소사건의 수는 얼마인가?

(풀이) 윷가락은 앞면과 뒤면이 구별되는 4개의 가락으로 되여있다.

이것들을 던질 때 매 가락은 앞면 또는 뒤면의 어느 한 면만을 나타낸다.

그러므로 윷가락을 던지는 시행에서 나타나는 매 사건은 앞면과 뒤면의 2개 원소로 이루어진 모임에서 4개를 뽑은 중복순렬과 같다.

따라서 이 시행에서의 요소사건수는

$$\Pi_2^4 = 2^4 = 16$$

알아보기 만년필이 7자루, 원주필이 3자루 들어있는 통에서 아무렇게나 한 자루 꺼낼 때 그것이 만년필일 가능성이 크다고 말하면 옳은가? 왜 그런가?

한 시행에서 일어날수 있는 요소사건들이 모두 n개이고 사건 A가 $k(0 \le k \le n)$개의 요소사건들로 이루어진 사건이면 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 확률이라고 부르며 P(A)로 표시한다. 즉

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

이렇게 확률을 정하는것을 **확률의 고전적정의**라고 부른다.

아무런 사건 A에 대해서나 늘 $0 \le P(A) \le 1$이다. 특히

$$P(\Omega) = 1, \ P(\phi) = 0$$

례 4 앞면과 뒤면이 구별되는 원판을 던지는 시행에서 요소사건수는 2이고 앞면이 나타나는 사건은 1개이므로 앞면이 나타날 사건을 A라면

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

이것은 앞에서 통계적방법으로 구한 확률과 일치한다.

례 5 윷놀이를 할 때 《도》, 《개》, 《걸》, 《쓩》, 《모》가 나오는 사건들이 확률이 같은 사건이라고 볼수 있는가?

(풀이) 윷가락을 던지는 시행에서 요소사건수는 16이다. 《도》, 《개》, 《걸》, 《쓩》, 《모》가 나오는 사건들을 A, B, C, D, E라고 하자.

윷가락 4개가운데서 한개만 앞면이 나타난것이 《도》이므로 《도》가 나오는 사건은 C_4^1개의 요소사건으로 이루어진다. 따라서

$$P(A)=\frac{C_4^1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

《개》가 나오는 사건은 C_4^2개의 요소사건으로 이루어지므로

$$P(B)=\frac{C_4^2}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

《걸》이 나오는 사건은 C_4^3 의 요소사건으로 이루어지므로

$$P(C)=\frac{C_4^3}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

《쑹》과 《모》는 각각 C_4^4, C_4^0개의 요소사건으로 이루어진다.

그런데 $C_4^0=C_4^4=1$이므로

$$P(D)=P(E)=\frac{1}{16}$$

그러므로

$$P(D)=P(E)<P(A)=P(C)<P(B)$$

례 6 어떤 양어장에서 100마리의 물고기를 잡아 붉은 표식을 하여 놓아주었다. 얼마후 새로 물고기를 100마리 잡아보니 붉은 표식이 있는 물고기가 2마리였다. 저수지에 물고기가 모두 몇마리정도 있겠는가?

(풀이) 저수지에 있는 물고기수를 x라고 하고 이때 임의로 한마리의 물고기를 잡았을 때 붉은 표식이 있을 확률은 $\frac{100}{x}$이라고 볼수 있다.

한편 100마리를 잡았을 때 붉은 표식이 있는것이 2마리였으므로 붉은 표식이 있는 물고기가 잡힐 확률은 $\frac{2}{100}$이다.

따라서

$$\frac{100}{x}=\frac{2}{100}$$

$x=5000$ 답. 5 000마리

(주의) 이 실례에서 $\frac{2}{100}$는 통계적정의에 기초하고있으며 $\frac{100}{x}$은 고전적정의에 기초하고있다.

문 제

1. 3개의 정수와 2개의 부수가 있다. 그가운데서 아무렇게나 2개를 잡을 때 그것들의 적이 정수일 사건 A와 부수일 사건 B의 확률을 구하여라.
2. 주사위를 2개 던졌을 때 웃면에 나타나는 눈수의 합이 9로 될 사건의 확률을 구하여라.
3. 매 면을 고르롭게 칠한 바른6면체를 1 000개의 크기가 꼭같은 쪼각바른6면체로 나누고 섞은 다음 임의로 한쪼각 바른6면체를 잡았을 때 2개 면이 색칠되였을 확률을 구하여라. 또 어느 면도 색칠되지 않았을 확률을 구하여라.
4. 1등품이 10개, 2등품이 3개, 3등품이 2개 들어있는 통에서
   1) 아무렇게나 한개를 꺼낸것이 1등품일 확률을 구하여라.
   2) 아무렇게나 2개를 꺼낸것이 다 1등품일 확률을 구하여라.
   3) 아무렇게나 2개를 꺼냈을 때 그가운데 하나는 1등품이고 다른 하나는 2등품일 확률을 구하여라.
5. 같은 종류의 제품 N개가운데 1등품이 $M(\le N)$개 있다. 여기서 아무렇게나 $n(\le N)$개를 꺼낼 때 거기에 1등품이 $m(\le M)$개 있을 확률을 구하여라.

탐 구

너비가 a인 접촉지뢰를 L인 간격($a<L$)으로 매설하였다. 땅크의 너비는 b이고 무한궤도의 너비는 k($a<b-2k$)라고 한다. 지뢰원에 의하여 땅크가 파괴될 확률을 구하여라.

3. 더하기정리와 곱하기정리

더하기정리

정리 1. 배반사건의 합사건의 확률은 매개 사건의 확률의 합과 같다. 즉

$$A\cap B=\phi \text{이면 } P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

(증명) 요소사건들의 개수를 n, 이가운데서 사건A, B 를 이루는 요소사건의 수를 각각 m_1, m_2라면

$$P(A)=\frac{m_1}{n},\ P(B)=\frac{m_2}{n}$$

A, B는 배반사건이므로 A∪B는 m_1+m_2의 요소사건들로 이루어진다. 따라서

$$P(A\cup B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

일반적으로 사건 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$들이 서로 배반이면

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

계. 사건 A의 나머지사건 $\overline{A}$의 확률은

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

(증명) A와 $\overline{A}$는 배반사건이고 $A\cup\overline{A}=\Omega$이므로 정리 1에 의해

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

따라서

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

례 1 60개의 제품이 들어있는 상자에서 1등품이 51개, 2등품이 7개, 3등품이 2개라고 한다. 이 상자에서 아무렇게나 한개의 제품을 꺼낼 때 그것이 1등품이거나 2등품일 사건 C와 3등품일 사건 D의 확률을 구하여라.

(풀이) 꺼낸 제품이 1등품일 사건을 A, 2등품일 사건을 B로 표시하면

$$P(A)=\frac{51}{60},\quad P(B)=\frac{7}{60}$$

그런데 $C=A\cup B$, $A\cap B=\phi$이므로

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{51}{60}+\frac{7}{60}=\frac{58}{60}=\frac{29}{30}$$

그리고 $D=\overline{C}$이므로

$$P(D)=1-P(C)=1-\frac{29}{30}=\frac{1}{30}$$

례 2 20마리의 토끼가운데 검은 토끼가 7마리이고 나머지는 흰 토끼이다. 이가운데서 아무렇게나 4마리의 토끼를 꺼낼 때 적어도 한마리가 검은 토끼일 확률을 구하여라.

(풀이) 20마리가운데서 4마리를 꺼내는 시행이므로 가능한 경우수는 C_{20}^4이다.

그가운데 4마리가 모두 흰 토끼일 사건은 C_{13}^4 개의 요소사건으로 이루어진다. 이 사건을 A로 표시하면 4마리가운데 적어도 한마리가 검은 토끼일 사건은 $\overline{A}$ 이므로 그 확률은 다음과 같다.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{C_{13}^4}{C_{20}^4}=1-\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=1-\frac{143}{969}=\frac{826}{969}\approx0.85$$

일반적으로 임의의 두 사건 A, B에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

례 3 100이하의 자연수가운데서 임의로 잡은 수가 2 또는 5로 완제될 확률을 구하여라.

(풀이) 임의로 잡은 수가 2로 완제될 사건을 A_1, 5로 완제될 사건을 A_2로 표시하면 2 또는 5로 완제될 사건은 A_1과 A_2의 합사건이다.

그런데 2와 5로 완제되는 수 즉 10의 배수들이 있으므로

$$A_1\cap A_2\neq\phi$$

그러므로 A_1와 A_2는 배반사건이 아니다.

따라서

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=\frac{50}{100}+\frac{20}{100}-\frac{10}{100}=\frac{3}{5}$$

문 제

1. 50개의 제품가운데 2등품이 10개 있다고 한다. 아무렇게나 5개의 제품을 꺼낼 때 2등품이 적어도 한개 들어있을 확률을 구하여라.
2. 40개의 공가운데 롱구공이 10개 들어있다. 아무렇게나 6개의 공을 잡을 때 롱구공이 2개이상일 확률을 구하여라.
3. 일반화된 더하기공식 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$를 증명하여라.
4. 1부터 20까지의 수를 하나씩 써넣은 20개의 카드가운데서 아무렇게나 한 카드를 잡았을 때 거기에 적힌 수가 2의 배수이거나 3의 배수일 확률을 구하여라.
5. 1부터 20까지의 번호를 붙인 20장의 카드가 있는 상자에서 임의로 3장을 꺼낼 때 5의 배수가 적어도 하나 들어있을 확률은 ( )이다.

1) $\frac{19}{5}$ 2) $\frac{29}{57}$ 3) $\frac{39}{57}$ 4) $\frac{49}{57}$

곱하기정리

알아보기 1) 두개의 주사위를 하나씩 던질 때 두번째 주사위의 웃면에 1의 눈이 나타나는 사건의 확률은 첫번째 주사위의 웃면에 어떤 눈이 나타났는가에 관계되는가?

2) 흰 공이 7개, 검은 공이 3개 들어있는 통에서 2개의 공을 임의로 하나씩 꺼낼 때 두번째로 꺼낸 공이 흰 공일 사건의 확률은 첫번째로 어떤 공을 꺼냈는가에 관계되는가?

1)에서 둘째 주사위의 웃면에 1의 눈이 나타나는 사건은 첫번째 주사위의 웃면에 어떤 수의 눈이 나타났는가에 관계없이 일어날수도 있고 일어나지 않을수도 있다. 이와 같이 두 사건 A, B에서 어느 한 사건이 일어날 확률이 다른 사건이 일어났는가 일어나지 않았는가에 관계되지 않을 때 두 사건 A, B는 서로 **독립**이라고 말한다.

2)에서와 같이 일반적으로 시행을 두번 실시할 때 첫 시행에서 사건 A가 일어났는가 일어나지 않았는가에 따라 두번째 시행에서 사건 B가 일어날 확률이 달라질 때 사건 B는 사건 A에 **종속된다**고 말한다.

사건 A가 일어난 조건밑에서 사건 B가 일어날 확률을 조건부확률이라고 부르고 $P_A(B)$로 표시한다.

례 4 흰 공이 7개, 검은 공이 3개 들어있는 통에서 처음 꺼낸 공이 흰 공일 사건 A, 두번째로 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 B라면 $P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(B)$는 어떤 사건의 확률이며 그 값은 얼마인가?

$P_A(B)$는 첫번째로 흰 공을 꺼낸 조건밑에서 두번째로 흰 공을 꺼낼 사건의 확률이다. 그러므로

$$P_A(B)=\frac{7-1}{7+3-1}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$P_{\bar{A}}(B)$는 첫번째로 검은 공을 꺼낸 조건밑에서 두번째로 흰 공을 꺼낼 사건의 확률이다. 그러므로

$$P_{\bar{A}}(B)=\frac{7}{10-1}=\frac{7}{9}$$

정리 2. 두 사건 A, B의 적사건의 확률은 한 사건의 확률에 이 사건이 일어난 조건밑에서 다른 사건이 일어날 조건부확률을 곱한 적과 같다. 즉

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

(증명) 요소사건의 수를 n, 그가운데서 사건 A, A∩B를 이루는 요소사건의 수를 각각 m, k 라면

$$P(A\cap B)=\frac{k}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{m}$$

그런데 $\frac{m}{n}=P(A)$, $\frac{k}{m}=P_A(B)$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

마찬가지로 $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$도 증명된다.

A, B가 독립이라면 $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

3개이상의 사건들에 대해서는 다음 공식이 성립한다.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(C)$$

례 5 100개의 제품이 들어있는 제품상자가 있다. 상자에서 5개의 제품을 하나씩 꺼내여 검사하는데 한개라도 불합격품이 나오면 그 상자의 제품은 모두 불합격으로 판정된다고 하자. 상자안에 불합격품이 5개정도 들어있다고 하면 이 제품상자가 불합격으로 판정될 확률은 얼마인가?

(풀이) 제품상자가 합격으로 판정될 사건을 A, i번째 검사에서 합격품이 나올 사건을 A_i (1, 2, ⋯, 5) 라고 하면

$$A=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5$$

곱하기정리에 의해

$$P(A)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)P_{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}(A_5)$$

100개가운데 합격품이 95개이므로

$$P(A_1)=\frac{95}{100}$$

$$P_{A_1}(A_2)=\frac{95-1}{100-1}=\frac{94}{99}$$

$$P_{A_1\cap A_2}(A_3)=\frac{94-1}{99-1}=\frac{93}{98}$$

$$P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)=\frac{93-1}{98-1}=\frac{92}{97}$$

$$P_{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}(A_5)=\frac{92-1}{97-1}=\frac{91}{96}$$

따라서 $P(A)=\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96}\approx 0.77$

제품상자가 불합격품으로 판정될 확률은

$$1-P(A)\approx 0.23$$

문 제

1. 100개의 부속품가운데 2등품이 1개 있다. 부속품을 한개씩 꺼내서 질을 검사할 때 다음 확률을 구하여라.

   1) 첫번째에 2등품이 나올 확률

   2) 두번째에 2등품이 나올 확률

   3) 세번째에 2등품이 나올 확률

2. 흰 공이 4개, 붉은 공이 3개 들어있는 통에서 공을 한개씩 꺼낸다. 첫째것이 흰 공이고 둘째것이 붉은 공일 확률을 구하여라.

3. 세 종류의 전자요소가 고장없이 동작할 확률이 각각 0.8, 0.85, 0.9이다. 이 요소들은 각각 독립적으로 동작한다. 이 세 요소가 다 고장없이 동작하게 될 확률을 구하여라.

련 습 문 제

1. 다음 명제들에서 옳은것을 찾아보아라.

   1) 총을 쏠 때 목표를 명중하는 사건과 명중하지 못하는 사건은 일어날 가능성이 같은 사건이다.

   2) $P(A\cup B)=1$이면 A와 B는 서로 나머지사건이다.

3) $P(A)+P(B)=1$은 두 사건 A, B가 서로 나머지사건이기 위한 필요조건이다.

4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$이면 사건 A, B는 서로 독립이다.

5) A, B가 배반사건이면 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$이다.

2. 아무렇게나 두자리수를 쓸 때 그 수자들의 합이 10으로 될 확률을 구하여라.

3. 20마리의 토끼가운데 5마리가 검은 토끼이다. 이가운데서 아무렇게나 2마리를 꺼낸것이 다 검은 토끼일 확률을 구하여라.

4. 상자속에 6개의 흰 공과 4개의 검은 공이 들어있다. 이 상자속에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때 그가운데 2개가 흰 공, 한개가 검은 공일 확률을 구하여라.

5. 1부터 9까지의 수자를 하나씩 쓴 9매의 카드가 있다. 이가운데서 아무렇게나 5개의 카드를 꺼낼 때

1) 1, 2, 3이 다 들어있을 확률을 구하여라.

2) 7이상이 하나만 들어있을 확률을 구하여라.

6. 학생 15명가운데서 탁구선수 4명을 뽑으려고 한다. 이때 이미 지정된 2명이 다 탁구선수로 뽑힐 확률은 얼마인가?

7. 은철이와 창현이가 속한 6학년 2반은 40명이다. 이 학급 학생들을 4개의 학습반으로 10명씩 가를 때 은철이와 창현이가 한 학습반에 속할 확률을 구하여라.

8. 전기회로에 직렬로 련결된 3개의 요소가 있다. 전압이 2배로 올라갈 때 매개 요소가 파괴될 확률은 각각 0.3, 0.4, 0.6이다. 이 회로가 끊어지지 않을 확률을 구하여라.

9. 어떤 전기회로에 20개의 요소가 있다. 이 요소들은 독립적으로 작용하며 고장없이 가동할 확률은 모두 0.7이다. 매 요소들이 동시에 가동할 확률은 다음것들가운데 어느것인가?

1) $1-0.3^{20}$ 2) $1-0.7^{20}$ 3) 0.3^{20} 4) 0.7^{20}

10. 불량품이 5% 들어있는 통에서 5개의 제품을 꺼낼 때 불량품이 한개 들어있는 확률은 다음것들가운데 어느것인가?

1) $\dfrac{C_5^1\times C_{95}^4}{C_{100}^5}$ 2) $0.95^4\times 0.05$

3) 4×0.95^4 4) $5\times 0.95^4\times 0.05$

제 2 절. 우연량의 확률분포

1. 2마디분포

실제 문제들에서는 이러저러한 시행을 한번이 아니라 여러번 거듭 반복할 때가 많다.

실례로 어떤 량을 반복 측정한다든가 실험을 되풀이하는것을 들수 있다.

이러한 시행들의 렬을 **시행렬**이라고 부른다.

시행렬 $\{T_i\}$에서 매 시행 T_i의 결과로 일어나는 사건 A_i들이 서로 독립이면 이 시행렬을 **독립시행렬**이라고 부른다.

독립시행렬가운데서 가장 단순하면서도 중요한것은 매 시행의 결과가 항상 두가지로 되고 그 확률이 시행의 번호가 달라져도 변하지 않는 그런 시행렬이다.

독립시행렬의 매 시행에서 두가지 사건 A, $\overline{A}$만 일어날 때 $\{T_i\}$를 **단순독립시행렬**이라고 부른다.

례 1 1) 사격수가 3발을 단발사격하는것은 단순독립시행렬인가?

2) 명중확률이 p일 때 명중회수의 확률을 구하여라.

(풀이) 1) 매 사격은 독립적으로 진행되며 그 결과는 매 사격에서 명중할 사건을 A로 표시하면 A이든가 $\overline{A}$로만 된다.

따라서 사격은 단순독립시행렬이다.

2) $P(A)=p$, $P(\overline{A})=1-P(A)=1-p=q$

명중회수 0, 1, 2, 3에 대응하는 사건을 B_0, B_1, B_2, B_3으로 표시하면 $B_0=\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A}$ 이므로

$$P_3(0)=P(B_0)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})=q\cdot q\cdot q=C_3^0q^3$$

이고

$$B_1=(A\cap\overline{A}\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap A\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap\overline{A}\cap A)\text{이므로}$$

$$P_3(1)=P(B_1)=C_3^1P(A)\cdot\left[P(\overline{A})\right]^2=C_3^1pq^2$$

이고

$$B_2=(A\cap A\cap \overline{A})\cup(A\cap \overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap A\cap A)$$ 이므로

$$P_3(2)=P(B_2)=C_3^2\cdot[P(A)]^2\cdot P(\overline{A})=C_3^2p^2q$$

이고 $B_3=A\cap A\cap A$ 이므로

$$P_3(3)=P(B_3)=P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)=C_3^3p^3$$

일반적으로

> ***n*개로 된 단순독립시행렬에서 사건 A가 *m*번 나타날 확률을 $P_n(m)$이라고 하면**
>
> $$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}\ (m=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n)$$
>
> 여기서 p는 매 시행에서 A가 나타날 확률, q는 매 시행에서 $\overline{A}$가 나타날 확률(q=1-p)이다.

우의 식에서 $P_n(m)$은 2마디식 $(px+q)^n$의 전개식에서 x^m결수로 된다.

그러므로 매 m의 값에 결수로 되는 확률 $P_n(m)$이 대응되였다고 말할수 있다.

이러한 의미에서 $P_n(m)$ $(m=0,1,..,n)$을 2마디분포라고 부른다.

례 2 자동화된 생산공정에서 생산되여나오는 제품들에 대하여 매 시간마다 100개씩 선택하여 검사를 한다고 하자. 정상적인 조건밑에서 불합격품이 나올 확률은 0.005라고 한다. 이때 불합격품이 5개이상 나올 확률을 구하여라.

(풀이) 제품을 하나씩 검사하는것은 단순독립시행렬이라고 할수 있으므로 불합격품의 개수 k의 확률은 2마디분포에 따른다.

따라서 불합격품이 k개 나올 확률은 다음과 같다.

$$P_{100}(k)=C_{100}^k 0.005^k(1-0.005)^{100-k}$$

불합격품이 5개이상 나오는 사건을 A라면 $\overline{A}$는 불합격품이 4개이하인 사건이다. 따라서

$$P(\overline{A})=\sum_{k=0}^{4} C_{100}^k 0.005^k(1-0.005)^{100-k}\approx 0.9947$$

따라서

$$P(A) \approx 1 - 0.9947 = 0.0053$$

이것은 1 000번 검사하였을 때 불합격품이 5개이상 나타나는 사건은 5번 정도 일어난다는것을 보여준다. 즉 정상상태에서는 거의 일어나지 않는다는것이다.

문 제

1. 주사위를 던질 때 웃면에 6의 눈이 나타날 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 10번 던질 때 6의 눈이 나타나는 회수가 7일 확률을 구하여라.
2. 두 면에 각각 검은색과 흰색을 칠한 원판을 계속 던질 때 검은색이 계속 나타날 확률이 0.01보다 작게 하기 위해서는 원판을 적어도 몇번 던져야 하는가?
   ($p = 0.5$, $\lg 2 = 0.301$)
3. 《예》 또는 《아니》라고 대답할 6개의 문제에 대하여 되는대로 《예》 또는 《아니》라고 대답하였을 때 다음것을 구하여라.
   1) 두 문제만 옳게 대답하였을 확률
   2) 3문제이상 옳게 대답하였을 확률
4. 2등품이 10% 들어있는 제품상자에서 아무렇게나 4개의 제품을 꺼낼 때 그속에 들어있는 2등품의 개수의 확률을 구하여라.
5. 2마디분포를 리용하여 윷놀이에서 《도》, 《개》, 《걸》, 《쓩》, 《모》가 나타날 확률을 구하여라.

실험에 의하면 2마디분포에서 n이 충분히 클 때 $P_n(m)$은 m의 변화에 따라 증가하다가 감소한다. 이때 $P_n(m)$이 최대로 되는 m을 구하는 문제는 흥미가 있다.

$$\frac{p_n(m+1)}{p_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$$

이므로 $P_n(m+1) \le P_n(m)$이기 위해서는 $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{P}{q} \le 1$ 즉 $(n+1)p \le m+1$로 될것이 필요하고 충분하다.

그러므로 $m_0 = [(n+1)p]$ (여기서 $[\ \ ]$는 옹근수부를 표시한다.)라고 하면 다음 사실이 성립한다.

1° $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수일 때에는

$$\mathrm{p}_n(0)<\mathrm{p}_n(1)<\cdots<\mathrm{p}_n(m_0-1)=\mathrm{p}_n(m_0)>\mathrm{p}_n(m+1)>\cdots>\mathrm{p}_n(n)$$

2° $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수가 아닐 때에는

$$\mathrm{p}_n(0)<\mathrm{p}_n(1)<\cdots<\mathrm{p}_n(m_0-1)<\mathrm{p}_n(m_0)>\mathrm{p}_n(m_0+1)>\cdots>\mathrm{p}_n(n)$$

사실 $(n+1)\mathrm{p}$ 이 옹근수이면 $m_0=(n+1)\,\mathrm{p}$ 이므로 $m_0\le m+1$ 에서 $m_0=m+1$ 또는 $m_0=m$ 이다. 그러므로 $m=m_0-1$, $m=m_0$ 이므로 $\mathrm{p}_n(m_0-1)=\mathrm{p}_n(m)$ 이다.

$(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수가 아니면 $m_0<(n+1)\mathrm{p}$ 이므로 $m_0=m$ 이다.

따라서 $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수일 때에는 사건 A가 m_0-1 또는 m_0 번 출현할 가능성이 제일 크고 $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수가 아닐 때에는 m_0 번 출현할 가능성이 제일 크다.

례 3 가령 포가 8문 있다고 하자. 가동확률이 98%일 때 몇문의 예비포를 가져야 하는가?

(풀이) 이 문제를 풀자면 가동하지 못할 가능성이 제일 큰 경우를 생각하여야 한다. 가동하지 못할 사건을 A라고 하면 A의 확률은 2% 즉 0.02이다.

따라서

$$(n+1)\mathrm{p}=(8+1)\times 0.02=0.18 \text{ 이므로 } [0.18]=0$$

이로부터 예비포가 필요없다는 결론이 얻어진다.

만일 이러한 포가 100문이 있다면

$$(n+1)\mathrm{p}=(100+1)\times 0.02=2.02$$

이므로 예비포는 2문이 있어야 한다.

문 제

1. 20대의 뻐스가 있다. 매 뻐스의 년평균 가동하지 못할 확률은 0.05이다. 몇대의 예비대수를 가져야 뻐스를 만가동할수 있겠는가?
2. 100대의 기대가 있다. 매 기대의 가동확률이 0.98이다. 기대의 만가동을 보장하려면 몇대의 예비기대를 가져야 하는가?
3. 11명의 축구선수로 구성된 축구팀에서 선수의 출석률이 0.98이다. 후보선수가 몇명이 있어야 하는가?

2. 우연량의 확률분포와 특성값

2마디분포에서 m 이 $m = 0, 1, \cdots$ 에 따라 변하면 m 의 매 값에는 확률 $P_n(m)$이 대응한다. 이와 같이 m 과 같은 변량에 확률이 대응될 때 그 변량을 **우연량**이라고 부르고 우연량에 확률을 대응시켜놓은것을 **확률분포**라고 부른다.

2마디분포는 확률분포의 한 실례로 된다.

일반적으로 우연량 x 가 취할수 있는 값이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 이고 이에 대응하는 확률이 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 일 때 x 의 확률분포는 표

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

로 표시할수 있다. 확률분포에서 확률들의 총합은 늘 1이다.

그것은 우연량이 잡을수 있는 모든 값에 대하여 그 값에 대응하는 사건들이 모두 배반사건들이고 그것들의 합사건은 확실한 사건이기때문이다.

례 1 주사위를 두번 던질 때 웃면이 나타나는 눈의 수의 합 x 의 확률분포를 구하여라.

(풀이) 주사위를 두번 던질 때 요소사건수는 36이다. 매 사건들을 $(i,\ j)$로 표시하자.(여기서 i는 첫번째 나온 눈의 수이고 j는 두번째 나온 눈의 수이다.)

i =2인 사건 (1, 1)

i =3인 사건 (1, 2), (2, 1)

i =4인 사건 (1, 3), (2, 2), (3, 1)

i =5인 사건 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

i =6인 사건 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

i =7인 사건 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

i =8인 사건 (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

i =9인 사건 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)

i =10인 사건 (4, 6), (5, 5), (6, 4)

i =11인 사건 (5, 6), (6, 5)

i =12인 사건 (6, 6)

그러므로 주사위를 두번 던질 때 x 의 확률분포는 다음과 같다.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

우연량의 확률분포를 알고있으면 그 우연량의 특성을 완전히 파악할수 있다.
그러나 어떤 경우에는 우연량의 개별적인 특성들만 알아도 될 때가 많다.
우연량의 개별적인 특성가운데서 가장 중요한것이 기대값과 편차이다.

우연량 x가 잡을수 있는 가능한 값들을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이라고 하고 그에 대응하는 확률을 각각 $p_1, p_2, \cdots, p_n$이라고 할 때

$$E_x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

을 우연량 x의 수학적기대값 또는 기대값이라고 부른다.

수학적기대값은 우연량이 잡는 값들의 확률적인 평균값이라고 볼수 있으며 우연량의 확률분포에서 중심을 표시하는 특성량이다.

례 2 주사위를 두번 던질 때 웃면에 나타나는 눈의 개수들의 합의 수학적기대값을 구하여라.

(풀이) 례 1의 표를 리용하면

$$E_x = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{1}{18} + 4\cdot\frac{1}{12} + 5\cdot\frac{1}{9} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{1}{6}$$
$$+ 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{1}{9} + 10\cdot\frac{1}{12} + 11\cdot\frac{1}{18} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

이것은 주사위를 두번 던질 때 웃면에 나타나는 눈의 수의 합이 7일 때가 가장 많다는것이다.

례 3 한가지 부속품을 생산하는 두 기대의 생산량가운데서 생기는 3등품의 개수 x의 확률분포는 각각 다음과 같다.

x_1	0	1	2	3
p	0.4	0.3	0.2	0.1

x_2	0	1	2	3
p	0.3	0.5	0.2	0

이 2대의 생산량이 같다면 어느 기대가 더 좋은가?

(풀이) 두 기대의 생산량이 같으므로 3등품의 개수가 더 적은 기대가 좋은 기대라고 평가할수 있다.

두 기대가 내는 3등품개수의 수학적기대값을 구하면

$$E_{x_1} = 0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1$$

$$E_{x_2} = 0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2+3\times0=0.9$$

$$E_{x_1} > E_{x_2}$$

따라서 둘째 기대가 첫째 기대보다 더 좋다.

례 4 2마디분포에 따르는 우연량의 수학적기대값을 구하여라.

(풀이) x가 2마디분포에 따르는 우연량이면

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

그러므로 그의 기대값은

$$E_x = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$$

례를 들면 명중확률이 0.95인 총으로 100발 사격할 때 95발정도는 명중할것이라고 짐작할수 있다.

문 제

1. 다음 수렬가운데서 우연량 x의 확률분포로 될수 없는것은 어느것인가?

1) $0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}$ 2) 0.1, 0.2, 0.3

3) $p,\ 1-p,\ p\ (p\neq0)$ 4) $\frac{1}{1\cdot2},\ \frac{1}{2\cdot3},\ \cdots,\ \frac{1}{(n-1)\cdot n},\ \frac{1}{n}$

2. 어떤 놀이감공장의 한 작업반에서 동일한 종류의 놀이감을 생산하는데 생산된 제품가운데서 1등품이 85%, 2등품이 10%, 3등품이 5% 있고 개당 1등품의 값은 100원, 2등품의 값은 90원, 3등품의 값은 85원이다. 이 작업반에서 하루 평균 생산량이 1 000개이라면 매일 작업에 착수하기 전에 이 작업반에서는 얼마만한 수입을 기대할수 있는가?

3. 명중확률이 0.95로 평가된 사격수가 3번 사격할 때 목표판에 명중한 회수 x의 확률분포와 수학적기대값을 구하여라.

4. 원둘레모양의 고리를 던져 말뚝에 거는 놀이를 할 때 한개 걸릴 때마다 1점씩 받는다고 하자. 10개 던져서 8점정도 받는 학생이 4개의 고리를 던질 때 얻을수 있는 점수의 확률분포와 기대값을 구하여라.

우연량 x의 수학적기대값을 E_x라고 할 때

$$(x_1-\mathrm{E}_x)^2\mathrm{p}_1+(x_2-\mathrm{E}_x)^2\mathrm{p}_2+\cdots+(x_n-\mathrm{E}_x)^2\mathrm{p}_n$$

을 우연량 x의 분산 또는 2제곱편차라고 부르고 $\sigma^2(x)$로 표시한다.

즉

$$\sigma^2(x)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mathrm{E}_x)^2\mathrm{p}_k$$

그리고

$$\sigma(x)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mathrm{E}_x)^2\mathrm{p}_k}$$

를 표준편차라고 부른다.

수학적기대값 E_x 가 분포의 중심을 나타낸다면 2제곱편차 $\sigma^2(x)$ 와 표준편차 $\sigma(x)$는 중심으로부터 흩어진 정도(분산)를 나타내는 량이다.

우연량의 수학적기대값, 2제곱편차, 표준편차를 우연량의 **특성값**이라고 부른다.

례 5 주사위를 두번 던질 때 웃면에 나타나는 눈수들의 합의 표준편차를 구하여라.

(풀이) 례 2에서 본바와 같이 수학적기대값은 $\mathrm{E}_x=7$이다.

따라서 $$\sigma^2(x)=\frac{(2-7)^2}{36}+\frac{(3-7)^2}{18}+\frac{(4-7)^2}{12}+\frac{(5-7)^2}{9}$$

$$+(6-7)^2\cdot\frac{5}{36}+\frac{(7-7)^2}{6}+(8-7)^2\cdot\frac{5}{36}$$

$$+\frac{(9-7)^2}{9}+\frac{(10-7)^2}{12}+\frac{(11-7)^2}{18}+\frac{(12-7)^2}{36}$$

$$=2\left(\frac{25}{36}+\frac{16}{18}+\frac{9}{12}+\frac{4}{9}+\frac{5}{36}\right)=5\frac{5}{6}$$

따라서 $\sigma(x)=\sqrt{\frac{35}{6}}\approx 2.145$

례 6 한 학생의 성적표가 다음과 같다.

과목	국어	수학	외국어	물리
성적	5	4	4	3

이때 성적평가를 위하여 시험성적을 우연량으로 보고 특성값을 구하여라.

(풀이) 확률분포는

x	5	4	4	3
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

평균성적은 수학적기대값으로 평가된다.

$$m = 5 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 4$$

2제곱편차와 표준편차를 구하면

$$\sigma^2(x) = (5-4)^2 \cdot \frac{1}{4} + (4-4)^2 \cdot \frac{1}{4} + (4-4)^2 \cdot \frac{1}{4} + (3-4)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 평균성적은 우등이지만 편차가 있으므로 학생의 성적은 우등으로 평가할수 없다.

문 제

1. 명중확률이 0.9인 총으로 총탄 5발을 가지고 사격할 때 목표판에 명중한 회수 x의 수학적기대값과 표준편차를 구하여라.

2. 2마디분포에 따르는 우연량의 표준편차가 $\sigma = \sqrt{npq}$ 임을 밝혀라.

탐 구

매번 명중확률이 p인 사격을 목표를 명중할 때까지 진행한다고 하자. 사격회수 n을 우연량으로 보고 (이러한 우연량의 분포를 기하분포라고 부른다.) 그것의 수학적기대값과 2제곱편차를 구하여라.

3. 정규분포

주사위를 n번 던져서 1의 눈이 k번 나올 확률은

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

에 의하여 구할수 있다.

오른쪽표는 $n=10$일 때 1의 눈이 나올 회수 x의 확률분포이다. 마찬가지로 $n=30$, 50일 때에도 그 확률분포를 구할수 있다. 이것을 그라프로 표시하면 그림 5-2와 같다.

k	$p_{10}(k)$
0	0.161 5
1	0.323 0
2	0.290 7
3	0.155 0
4	0.054 3
5	0.013 0
6	0.002 2
7	0.000 2
8	0.000 0
9	…
10	…

그림에서 보는것처럼 n의 값이 커짐에 따라 그라프의 모양은 점차적으로 대칭으로 되여간다.

일반적으로 우연량 x가 2마디분포에 따를 때 n값이 커짐에 따라 그 확률분포의 그라프는 대칭인 곡선에 가까와간다는것이 알려져있다.(그림 5-3)

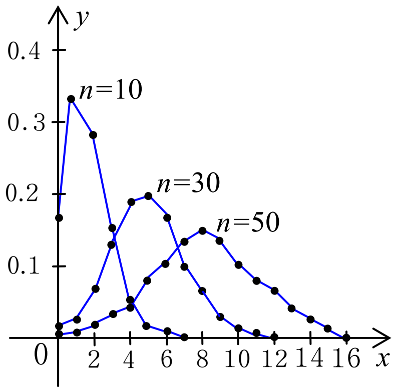


그림 5-2

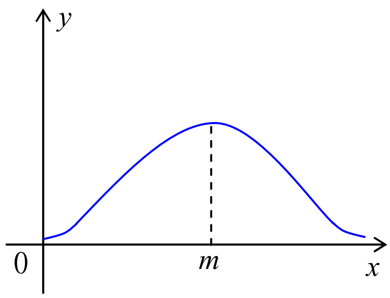


그림 5-3

이와 같은 곡선에 따르는 우연량 x의 확률분포를 **정규분포**, 그 곡선을 **정규분포곡선**이라고 부른다.

자연현상과 기술에서 만나게 되는 대부분의 우연량들은 정규분포에 따른다.

례를 들면 같은 종류의 생물체들의 이러저러한 기관들의 크기라든가 같은 나이의 사람들의 키, 발의 길이 그리고 여러가지 물리적량들의 측정값들, 브라운운동하는 립자의 자리표성분 등 수많은 량들은 정규분포에 따른다.

우연량 x의 평균값이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포곡선은 다음과 같은 성질을 가진다.

1° 곡선은 $x=m$에 관하여 대칭이다.

2° 곡선은 $x=m$일 때 최대값을 가지며 x가 m에서 멀어져감에 따라 곡선은 x축에 가까와간다.

3° 곡선과 x축사이의 부분면적은 1이다.

정규분포를 나타내는 곡선을 식으로 표시하면

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

평균값이 m, 분산이 σ^2인 정규분포를 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$으로 표시한다.
우연량 x가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$에 따를 때 다음 사실이 성립한다.

우연량 x가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$에 따를 때

$$\mathrm{P}(m-\sigma \le x \le m+\sigma)=0.683$$
$$\mathrm{P}(m-2\sigma \le x \le m+2\sigma)=0.954$$
$$\mathrm{P}(m-3\sigma \le x \le m+3\sigma)=0.997$$

여기서 $(m-\sigma,\ m+\sigma)$, $(m-2\sigma,\ m+2\sigma)$, $(m-3\sigma, m+3\sigma)$를 대응하는 **믿음구간**, 68.3, 95.4, 99.7을 **믿음도**라고 부른다.

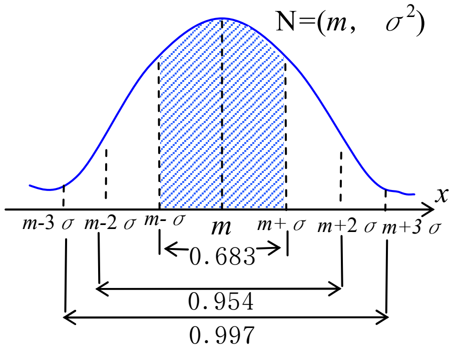


그림 5-4

례 1 어느 한 중학교 6학년 남학생들의 키는 기대값이 163cm, 표준편차가 3cm인 정규분포에 따른다고 한다. 이 학생들의 99.7%의 키는 어떤 범위에 든다고 말할수 있는가?

(풀이) $m = 163$ (cm), $\sigma = 3$ (cm)이므로

$m - 3\sigma = 163 - 3 \cdot 3 = 154$ (cm)

$m + 3\sigma = 163 + 3 \cdot 3 = 172$ (cm)이므로

이 학생들의 키는 99.7%가 154cm~172cm라는것을 알수 있다.

례 2 불합격품이 나올 확률이 0.05인 기대에서 생산한 제품을 1 000개 검사할 때 70개이상의 불합격품이 나올 확률을 구하여라.

(풀이) 제품검사에서 불합격품의 개수를 x라고 하면 x는 2마디분포에 따른다.

$n = 1000$, $\mathrm{p} = 0.05$ 이므로

$m = n\mathrm{p} = 1000 \times 0.05 = 50$ (개)

$$\sigma = \sqrt{n\mathrm{pq}} = \sqrt{1000 \times 0.05 \times 0.995} \approx 7 \text{ (개)}$$

그런데 시행회수 $n = 1000$ 은 충분히 큰값이므로 우연량 x는 정규분포 $(50,\ 7^2)$에 따른다고 볼수 있다.

$$m + 3\sigma = 50 + 3 \times 7 = 71$$

따라서 $\mathrm{P}(x \geq 70) = \mathrm{P}(x \geq m + 3\sigma) \approx \dfrac{1}{2}(1 - 0.997) = 0.0015$

이것은 1 000개에서 70개이상의 불합격품이 나오는 사건은 거의 일어나지 않는다는것을 보여준다.

문 제

1. 우연량 x가 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 7^2)$에 따를 때 다음 확률을 구하여라.
   1) $\mathrm{P}(99 \leq x \leq 141)$ 2) $\mathrm{P}(x \geq 106)$
2. 어느 한 중학교 6학년 녀학생들의 키는 기대값이 156cm이고 표준편차가 3cm인 정규분포에 따른다고 한다. 이때 이 녀학생들의 68.3%가 속하는 키의 범위를 구하여라.
3. 주사위를 7 200번 던질 때 웃면에 1의 눈이 1 000번이상 나올 확률을 구하여라.

련 습 문 제

1. 토끼가 새끼를 낳을 때 암컷과 수컷을 낳을 확률이 각각 0.5라고 할 때 다음것을 구하여라.
   1) 8마리의 새끼토끼가운데 암컷이 3마리일 확률
   2) 8마리의 새끼토끼가운데 4마리이상이 수컷이 아닐 확률

2. 명중확률이 0.8인 사격을 n번 진행하였을 때 적어도 $n-1$번 명중할 확률이 0.92보다 작게 되는 가장 작은 n을 구하여라.

3. 100개의 제품이 들어있는 상자에 10개의 특제품이 섞여있다. 상자에서 임의로 5개의 제품을 꺼내였을 때 거기에 들어있는 특제품의 개수 x의 확률분포와 수학적기대값을 구하여라.

4. 앞뒤가 구별되는 5개의 원판을 동시에 던질 때 앞면이 나타나는 개수를 x라고 할 때 다음것을 구하여라.

   1) x의 확률분포

   2) x의 수학적기대값과 표준편차

5. 남학생 5명, 녀학생 3명이 있는 분조에서 2명의 대표를 선출한다. 선출되는 남학생수를 x라고 할 때 x의 확률분포, 수학적기대값과 표준편차를 구하여라.

제 3 절. 통계자료처리

통계란 어떤 현상을 특징짓는 자료들을 체계적으로 기록하여놓은것을 말한다.

실례로 여러가지 제품의 생산량에 관한 자료, 생산물의 이러저러한 특성에 관한 자료, 자연현상이나 사회현상들에 대한 관측자료 같은것을 체계적으로 기록하여놓은것들은 모두 통계로 된다.

관측결과를 체계적으로 기록하여놓은것을 **통계자료**라고 부른다.

관측자료에 기초하여 관측한 대상의 특성을 분석하기 위하여 자료들을 분류하고 종합하는것을 **통계자료처리**라고 부른다.

1. 빈도수분포표

알아보기 다음 표는 어느 한 직장 종업원명단에 따르는 로동자들의 기능급수자료이다.

표 1

5	6	4	4	3	6	5	5	6	6
5	5	6	4	7	4	4	5	3	7
5	4	6	5	5	5	6	3	7	3
5	7	7	5	4	5	6	5	4	5
4	5	7	6	4	6	3	5	5	4

1) 이 직장 로동자들의 기능급수가 몇급부터 몇급까지인가?
2) 어느 급수를 가진 로동자들이 제일 많고 어느 급수를 가진 로동자들이 제일 적은가?
3) 이것을 한눈에 알아보자면 표를 어떻게 작성하면 되는가?

이 통계를 다음과 같이 작성하면 직장의 종업원들의 기능급수에 대한 정확한 인식을 가질수 있다.

급수	3	4	5	6	7	계
인원	5	11	18	10	6	50

이와 같이 관측자료를 특성이 같은것을 조로 편성하여놓은것을 **빈도수분포표**라고 부른다.

빈도수분포표는 관측대상과 그 대상에 대한 빈도수를 한눈에 알아볼수 있게 만들어진 통계분류의 한 형식이다.

통계를 빈도수분포표형식으로 종합하는것은 여러 분야에서 널리 쓰이고있다.

학생들의 학과목별 성적종합표, 사격선수들의 사격결과에 대한 성적종합표, 소대별 실탄사격종합표들은 모두 빈도수분포표이다.

례 1 다음 표는 20차례에 걸쳐 진행한 어느 학급 학생들의 시험성적을 학생별로 종합하여 써놓은 표이다. 여기서 《학생》칸의 수들은 출석부번호이다.

표 2

학생	성적	학생	성적	학생	성적	학생	성적
1	72	11	63	21	58		
2	83	12	88	22	53	31	86
3	57	13	79	23	86	32	100
4	46	14	93	24	83	33	82
5	59	15	86	25	80	34	68
6	90	16	59	26	89	35	96
7	68	17	86	27	79	36	64
8	55	18	71	28	76	37	70
9	96	19	62	29	99	38	53
10	82	20	75	30	63		

이 표를 통하여 매 학생의 성적이나 성적의 한계 같은것은 알수 있으나 실력이 높은 학생수를 인차 알아보기 어렵다.

이 자료를 40점부터 100점까지를 10점간격으로 갈라놓고 거기에 해당한 학생수를 적는 방법으로 표를 작성하면 표 3과 같다.

표 3

점수구간(급)	학생수(빈도수)
40-50	1
50-60	7
60-70	7
70-80	6
80-90	11
90-100	6
계	38

이와 같이 자료들을 정리하여 만든 구간을 **급**, 급사이의 너비를 **급간격**, 구간에 들어있는 자료의 개수를 그 급의 **빈도수**라고 부른다.

이런 표를 **급분류빈도수분포표**라고 부른다.

례 1에서　　급간격 : 10

급중심 : 45, 55, 65, 75, 85, 95

급이나 자료수가 많은 경우에 빈도수분포표만 보고서는 례를 들어 60점미만은 몇명인가, 80점이상은 몇명인가 하는것을 인차 알아내기 어렵다.

그래서 빈도수의 루적을 생각할 때도 있다.

첫째 급으로부터 어떤 급까지의 빈도수를 다 더한것을 그 급의 **루적빈도수**라고 부르고 루적빈도수를 써넣은 빈도수분포표를 **루적빈도수분포표**라고 부른다.

한 급의 빈도수를 전체 빈도수의 합으로 나눈것을 그 급의 **빈도률**이라고 부르며 빈도률을 적어놓은 표를 **빈도률분포표**라고 부른다.

례 2 표 4는 제1중학교 5학년 학생 40명의 키를 잰 결과를 기록한것이다. 이것을 가지고 급간격이 5㎝인 빈도수분포표, 루적빈도수분포표를 만들어라.(첫째 급은 140이상, 145미만으로 하여라.)

표 4

학생	키(cm)	학생	키(cm)	학생	키(cm)	학생	키(cm)
1	161	11	157	21	174	31	159
2	153	12	163	22	163	32	166
3	168	13	164	23	150	33	172
4	156	14	154	24	158	34	149
5	163	15	162	25	160	35	162
6	154	16	164	26	153	36	165
7	164	17	159	27	163	37	152
8	163	18	147	28	158	38	169
9	155	19	163	29	144	39	157
10	156	20	158	30	165	40	168

(풀이) 빈도수분포표와 루적빈도수분포표는 다음과 같다.

급	빈도수
140~145	1
145~150	2
150~155	6
155~160	10
160~165	13
165~170	6
170~175	2
계	40

급	루적빈도수
140~145	1
145~150	3
150~155	9
155~160	19
160~165	32
165~170	38
170~175	40

문 제

1. 례 2에서 키가 155cm미만인 학생은 몇명인가? 160cm이상은 몇명인가?
2. 례 2에서 키에 대한 빈도률분포표를 만들어라.
3. 다음 표는 어떤 학급 학생들의 키에 대한 급분류빈도수분포표이다. 루적빈도수분포표, 빈도률분포표를 만들어라.

표 5

급(키)	140~	145~	150~	155~	160~	165~170	계
빈도수(명)	1	3	9	17	8	2	40

2. 순서통계

통계를 커지는 차례로 써놓은것을 순서통계라고 부른다.

순서통계에서 제일 작은 값(왼쪽에 있다.)을 최소값이라고 부르고 $x_{\min}$ 로, 제일 큰 값을 최대값(오른쪽에 있다.)이라고 부르고 $x_{\max}$ 로 표시한다.

그리고 $\mathrm{R}=x_{\max}-x_{\min}$ 을 분포범위라고 부르며 가운데 있는 자료(개수가 홀수일 때는 가운데위치에 있는 자료, 개수가 짝수일 때는 가운데 있는 두 자료의 합평균)를 중위값이라고 부르고 x_{me} 로 표시한다.

례 학과경연에서 10명의 학생들이 얻은 점수자료는 다음과 같다.

28, 26, 24, 24, 25, 25, 26, 27, 29, 23

순서통계는

23, 24, 24, 25, 25, 26, 27, 28, 28, 29

$x_{\min}=23$, $x_{\max}=29$, $\mathrm{R}=6$, $x_{me}=25.5$

이처럼 집단의 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 알려고 할 때에는 이미 있는 통계자료로부터 순서통계를 만들어야 한다.

문 제

1. 학생 6명의 몸질량을 재여 얻은 자료는 다음과 같다.

59.7, 49.5, 54.4, 63.2, 61.3, 57.1

순서통계를 만들고 평균값, 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 구하여라.

2. 5명의 학생의 키는 다음과 같다.

162.2, 152.1, 165.4, 171.8, 172

순서통계를 만들고 평균값, 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 구하여라.

3. 통계작성방법

통계는 객관적인 대상의 특성을 연구하기 위하여 체계적으로 관측한 결과를 수자로 기록한것이다. 그러므로 처음부터 기록을 어떤 형식으로 하여야 특성을 정확히 알아낼수 있겠는가 하는 문제가 나선다. 그러므로 통계양식문제와 관측대상에서 어떤 대상을 택하는 문제가 중요하다.

수리통계학에서는 관측대상전체를 모집단이라고 부르며 거기로부터 직접 관측하는 대상을 표본이라고 부른다. 표본에 들어있는 대상의 수를 표본의 크기라고 부른다.

표본은 객관성을 보장할수 있게 우연적으로 뽑는다.

그러므로 표본의 개개는 우연량으로 된다.

모집단에서 꺼낸 표본에 대한 관측자료는 관측값과 개수를 표시하는 형식과 대상이 어떤 급으로 구분되여 표현되는 형식이 있다.

관측회수가 n일 때

$1°$ 관측값렬형식

관측값
x_1
x_2
$\vdots$
x_n

$2°$ 빈도수분포표형식

관측값	빈도수
x_1	n_1
x_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k
계	n

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$3°$ 급분류빈도수분포표형식

급	급중심	빈도수
$a_1 - a_2$	x_1	n_1
$a_2 - a_3$	x_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_k - a_{k-1}$	x_k	n_k
계		n

$$x_i = \frac{a_{i+1} + a_i}{2}$$
$$i = 1,\ 2, \cdots, k$$

통계는 모집단의 특성을 알기 위해 만들어진 자료이다. 모집단의 특성값(수학적 기대값과 분산)을 알기 위해 표본을 리용한다.

4. 통계량

조사나 관측을 통하여 얻은 자료의 분포상태는 평균값과 분산에 의해 특징지어진다.

1) 평균값

자료들의 총합을 자료의 개수로 나눈것을 **평균값**이라고 부르고 $\bar{x}$로 표시한다. 즉 n개의 자료 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \qquad (1)$$

자료가 그리 많지 않을 때에는 매 자료를 하나하나 더할수 있지만 많은 자료를 다룰 때에는 빈도수분포표형식으로 주어질수 있으므로 평균값으로 다음것을 리용한다.

자료가 빈도수분포표로 다음과 같이 주어지면

급중심	x_1 x_2 …… x_{k-1} x_k	계
빈도수	f_1 f_2 …… f_{k-1} f_k	n

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_if_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k}f_i=n\right) \qquad (2)$$

자료가 급분류빈도수분포표로 주어지면

자료	x_1 x_2 …… x_{k-1} x_k	계
빈도수	f_1 f_2 …… f_{k-1} f_k	n

$$\bar{x}\approx\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots x_kf_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_if_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k}f_i=n\right) \qquad (3)$$

례 1 표 2와 표 3을 가지고 평균성적을 계산하여 비교하여라.

(풀이) (2)에 의해 구하면 평균성적은

$$\bar{x}=\frac{1}{38}(43+53\times2+55+\cdots+96\times2+99+100)=\frac{2853}{38}\approx75.08$$

(3)에 의해 구하면

$$\bar{x}\approx\frac{1}{38}(45\times1+55\times7+65\times6+75\times7+85\times11+95\times6)=\frac{2850}{38}=75$$

75는 평균성적 75.08의 근사값이다.

앞으로 자료가 급분류빈도수분포표로 주어졌을 때는 (3)에 의해 정해지는 값을 평균값으로 보고 $\bar{x}$로 표시한다.

급중심 x_i들가운데서 빈도수가 비교적 크고 거의 가운데 놓인 급의 급중심 a를 **가평균**이라고 부른다.

급간격이 h라고 할 때

$$u_i = \frac{1}{h}(x_i - a) \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

라고 놓으면 $x_i = a + u_i h$이므로

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k = an + h(u_1 f_1 + \cdots + u_k f_k)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k) = a + \frac{h}{n}(u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_k f_k)$$

여기서 $\frac{1}{n}(u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_k f_k) = \bar{u}$ 라고 하면

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

$\bar{u}$를 계산하는것은 $\bar{x}$를 계산하기보다 간단하므로 이 식을 써서 평균값을 구하는 것이 편리할 때가 많다.

례 2 표 4로 주어진 자료에 대하여 평균키를 두가지 방법으로 구하여라.

(풀이) 공식에 의해 구하면

$$\bar{x} = \frac{6390}{40} = 159.75$$

급중심 x_i	f_i	u_i	$x_i f_i$	$u_i f_i$
142.5	1	-4	142.5	-4
147.5	2	-3	295	-6
152.5	6	-2	915	-12
157.5	10	-1	1 575	-10
162.5	13	0	2 112.5	0
167.5	6	1	1 005	6
172.5	2	2	345	4
계	40	-7	6 390	-22

$(a = 162.5)$

가평균을 리용하면 이 표에서 보는것처럼 $\bar{u}$의 계산이 쉽다.

$$\bar{x} = 162.5 + 5 \times \frac{(-22)}{40} = 159.75$$

문 제

1. 급분류빈도수분포표를 가지고 평균값을 계산할 때 급중심이 아니라 매개 급의 평균값을 리용하면 $\bar{x}$는 시초자료를 가지고 계산한 평균값과 일치한다. 왜 그런가?
2. 례 1에서 평균성적을 가평균을 써서 구하여라.
3. 아래의 표에 따르는 닭알의 평균질량을 구하여라.

닭알의 질량 (g)	45~	50~	55~	60~	65~	70~75	계
빈도수 (알)	6	41	123	190	111	29	500

2) 분 산

자료들의 분포상태를 알자면 분포의 범위나 평균값과 같은 분포의 중심위치와 함께 그로부터 흩어진 정도를 나타내는 수값도 알아내야 한다.

자료들의 흩어진 정도를 나타내는 수값을 **분산도**라고 부른다.

매 자료에 대하여 $x_k - \bar{x}$를 x_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$의 **편차**라고 부른다.

알아보기 편차의 평균값으로 흩어진 정도를 나타낼수 있겠는가?

편차의 2제곱의 평균값을 s^2으로 표시하고 **분산**이라고 부른다. 즉

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

그리고

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

를 **표준편차**라고 부른다.

자료가 빈도수분포표로 주어지면 분산은

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i, \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

자료가 급분류빈도수분포표로 주어졌을 경우에는 다음과 같이 계산한다.

x_i를 급중심, f_i를 빈도수라고 하면 $(i = 1, 2, \cdots, k)$

$$n=\sum_{i=1}^{k} f_i \quad , \quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i \quad : \text{분산}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i} \quad : \text{표준편차}$$

표본에 의해 정해지는 $\bar{x}$와 s^2 및 s를 **통계량**이라고 부른다.

례 3 두개 학급의 어느 달 수학과목성적은 다음 표와 같다.

급	점수 / 인원	5	4	3
1	30	8	11	11
2	20	6	6	8

어느 학급의 성적이 높은가?

(풀이) 평균성적 $\overline{x_1}=\frac{5\times8+4\times11+3\times11}{30}=\frac{117}{30}\approx3.9$

$$\overline{x_2}=\frac{5\times6+4\times6+3\times8}{20}=\frac{78}{20}=3.9$$

두 학급의 평균성적은 같다. 분산을 계산하면

$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	첫 학급		둘째 학급	
		f_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	f_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$
1.1	1.21	8	9.68	6	7.26
0.1	0.01	11	0.11	6	0.06
-0.9	0.81	11	8.91	8	6.48
계		30	18.7	20	13.8

여기로부터 $s_1^2=\frac{18.7}{30}=0.623$, $s_2^2=\frac{13.8}{20}=0.69$

평균성적은 비록 같지만 분산이 작은 1반이 2반보다 실력이 높다고 볼수 있다. 이것은 분산이 작을수록 성적이 높다는것을 보여준다.

례 4 다음의 표는 한 과수농장에서 어떤 과일나무묘목 200그루의 키를 재여 얻은 자료를 정리한것이다. 이 자료들의 평균값과 표준편차를 구하여라.

급(㎝)	27.5~	29.5~	31.5~	33.5~	35.5~	37.5~	39.5~	41.5 ~43.5	계
빈도수 (묘목수)	3	10	23	47	49	40	36	2	200

(풀이) 가평균을 리용하는것이 편리하므로 $a=36.5$라고 놓고 계산한다.

$$\bar{u}=\frac{1}{n}(u_1 f_1+u_2 f_2+\cdots+u_8 f_8)=-\frac{37}{200}=-0.185$$

x_i	f_i	u_i	$u_i f_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
28.5	3	-4	-12	-7.36	58.216 7	174.650 7
30.5	10	-3	-30	-5.36	31.696 9	316.969
32.5	23	-2	-46	-3.36	13.176 9	303.068 7
34.5	47	-1	-47	-1.36	2.656 9	124.874 3
36.5	49	0	0	0.37	0.136 9	6.708 1
38.5	40	1	40	2.37	5.616 9	224.676
40.5	26	2	52	4.37	19.096 9	496.519 4
42.5	2	3	6	6.37	40.576 9	81.153 8
계	200					1 728.62

$$\bar{x}=a+h\bar{u}=36.5+2(-0.185)=36.13(\text{cm})$$

공식에 의하여 표준편차를 구하면

$$s=\sqrt{\frac{1}{200}\times 1728.62}=\sqrt{8.6431}\approx 2.94(\text{cm})$$

문 제

1. 임의의 자료에 대해서나 편차의 총합은 늘 0이라는것을 밝혀라.
2. 표 4로 주어진 자료의 표준편차를 구하여라.
3. 표 5로 주어진 자료의 표준편차를 구하여라.

련 습 문 제

1. 다음 관측값에서 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 구하여라.

   165, 21, 19, 19.5, 17.5, 15, 15.5, 18.5, 18, 21, 20.5, 23, 23.5
2. 학생들의 키에 대한 관측값이 다음의 표로 주어졌다. 학생들의 평균키를 구하여라.

급간격	인원
150 - 155	2
155 - 160	13
160 - 165	25
165 - 170	10
170 - 175	5
175 - 180	3
180 - 185	2
계	60

3. 과목성적표가 다음과 같을 때 평균성적과 분산을 구하여라.

점수	5	4	3	계
인원	8	12	5	25

4. 다음 표는 학생들의 몸질량을 정리해놓은 급분류빈도수분포표이다.

급 (kg)	30~	35~	40~	45~	50~	55~	60~65	계
빈도수(명)	1	5	14	25	22	12	6	85

   1) 평균몸질량을 가평균을 리용하는 방법과 리용하지 않는 방법으로 각각 구하고 비교하여라.
   2) 표준편차를 구하여라.

5. 분산도의 하나로 또한 쓰이는것은 **평균편차**라고 부르는 다음과 같은 수값이다.

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|$$

1) 문제 4에서 몸질량에 대한 자료의 평균편차를 구하여라.
2) 표준편차와 비교해보아라.
3) 평균편차를 구하는 과정에 리용하는 표와 표에 적어넣는 순차를 어떻게 하는 것이 좋겠는가를 설명하여라.

제 4 절. 통계적추정과 예측

1. 통계적추정

통계자료에 기초하여 모집단의 특성값(평균값과 분산)을 알아내는것을 **추정**이라고 부른다.

모집단의 수학적기대값을 **모평균**이라고 부르고 m, 표준편차를 **모표준편차**라고 부르고 σ로 표시하며 표본의 평균값을 **표본평균**이라고 부르고 $\bar{x}$, 표준편차를 **표본표준편차**라고 부르고 s로 표시한다.

표본평균은 표본의 선택에 따라 변한다. 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균은 모평균둘레에 접근한다.

> 평균값이 m이고 표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출할 때 n이 충분히 크면 표본평균 $\bar{x}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$에 따른다.
>
> 특히 모집단이 정규분포에 따를 때 n의 크기에 관계없이 $\bar{x}$는 정규분포에 따른다.

이 사실을 리용하여 모집단에서 임의로 추출한 표본의 크기 n이 충분히 클 때 그 표본평균 $\bar{x}$를 알고 모평균 m을 추정한다.

례 1 표본크기 n이 충분히 클 때 표본평균 $\bar{x}$에 의해 모평균 m을 믿음도 95.4 % 로 추정하여라.

(풀이) 표본의 크기 n이 충분히 크므로 표본평균 $\bar{x}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

에 따르며 $\bar{x}$가 취하는 값이

$$m-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le m+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

의 범위에 속할 확률은 0.954이다.

이 안갈기식을 고쳐쓰면

$$\bar{x}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (*)$$

이것은 95.4%의 범위에서 m이 $\bar{x}$에 의해 정해진다는것을 의미한다.

표본을 추출할 때마다 $\bar{x}$의 값에 대하여 범위 (*)에 m이 포함되지 않을 수 있다. 그러나 표본을 100번 추출하면 약 95번정도는 값 $\bar{x}$에 대하여 범위 (*)에 m이 포함된다는것을 의미한다.

따라서 범위 (*)는 믿음도가 95.4%인 m에 대한 믿음구간으로 된다.

모표준편차 σ의 값을 확정하지 못하는 경우가 보통 제기된다. 그러나 표본의 크기 n이 충분히 클 때에는 σ를 표본표준편차 s로 바꾸어도 큰 차이가 생기지 않는다. 이리하여 모평균 m을 다음과 같이 추정한다.

모평균 m에 대하여 믿음도

95.4%의 믿음구간은 $\bar{x}-2\frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+2\frac{s}{\sqrt{n}}$

99.7%의 믿음구간은 $\bar{x}-3\frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+3\frac{s}{\sqrt{n}}$

례 2 어느 제1중학교 남학생들가운데서 임의로 선출된 81명의 몸질량의 평균값이 58.6kg, 표준편차가 4.5kg일 때 이 학교 남학생전체의 몸질량의 평균값을 믿음도 95.4%로 추정하여라.

(풀이) $n=81$, $\bar{x}=58.6$, $s=4.5$이므로

$$\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{4.5}{\sqrt{81}}=0.5$$

따라서 이 중학교 남학생의 몸질량의 평균값 m을 믿음도 95.4%로

$$58.6-2\times0.5 \le m \le 58.6+2\times0.5$$

즉

$$57.6 \le m \le 59.6$$

으로 추정할수 있다.

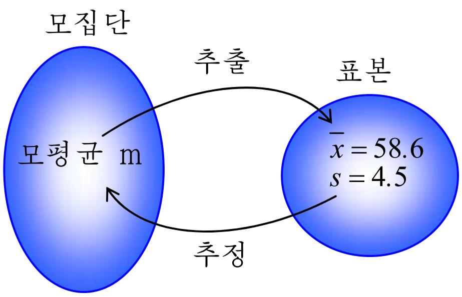


그림 5-5

문 제

1. 어떤 과일나무의 평균키를 조사하기 위하여 200그루의 과일나무를 측정하여 평균값 36.13, 표준편차 2.94를 얻었다. 과일나무의 평균키를 믿음도 99%로 추정하여라.
2. 어느 학교 남학생 100명을 임의로 선출하여 키의 평균값 164.9cm, 표준편차 5.5cm를 얻었다. 이 학교 남학생전체의 평균키를 믿음도 99.7%로 추정하여라.
3. 모집단이 정규분포 $N(50,\ 8^2)$에 따를 때 그로부터 임의로 100개 추출한 표본의 평균은 어떤 분포를 하는가?

2. 통계적예측

두 변량사이의 관계인 함수관계는 확정적인 관계로 설명된다.

례를 들면 변의 길이 X와 바른6면체의 체적 V사이의 관계 $V=X^3$은 확정적인 관계로서 한 변 X가 정해지는데 따라 체적 V는 유일하게 결정된다.

두 변량사이의 관계에는 또 다른 한가지 경우가 있다. 례를 들어 일정한 면적의 논의 시비량과 벼생산량사이의 관계를 고찰하자.

벼생산량은 시비량의 영향을 받을뿐아니라 또 기타 일련의 요인들(기후, 물주기, 살충 등과 같은것)의 영향을 받는다. 그러므로 시비량이 일정할 때 벼생산량은 일정한 우연성을 띤다.

이처럼 독립변수가 일정한 값을 취할 때 그에 종속되는 변량이 취하는 값이 일정한 우연성을 띠고있을 때 두 변량사이의 관계를 **상관관계**라고 부른다.

상관관계를 가지고있는 두 변량에 대하여 통계분석을 진행하는 방법을 **회귀분석**이라고 부른다.

현실생활에는 많은 상관관계가 존재한다.

례를 들어 사람의 키와 녀령, 제품의 원가와 생산량 등은 다 상관관계를 가지는 것들이다.

알아보기 어느 한 지방의 4월 1일부터 11일까지의 온도 측정자료가 다음의 표로 주어졌다.

날자	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
온도	10	11	13	14	16	14.5	14	15	17	18	19

1) 평면직각자리표계에 표의 매 쌍의 수자자료에 대응하는 점을 찍어라.

2) 이 점들은 어떤 특징을 가지고있는가?

3) 그림 5-6과 같은 직선이 하나뿐인가?

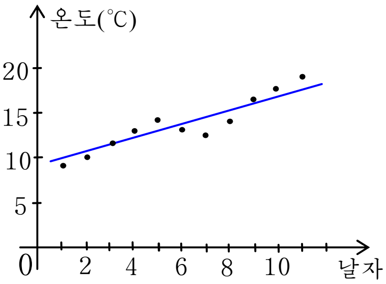


그림 5-6

일반적으로 X와 Y가 상관관계를 가지고있는 두 변량이며 n개의 관측자료에 따르는 n개의 점이 대체로 한 직선의 주위에 분포되여있다고 할 때 전반적으로 이 n개의 점과 가장 가깝게 떨어져있는 한 직선을 구해보자.

구하려는 직선의 방정식을 $\hat{y}=a+bx$라고 하자.

여기서 a, b는 결정해야 할 결수이다.

변량 X가 수 값 x_i를 취할 때 $\hat{y}_i=a+bx_i$이다.

알아보기 1) 이때 얻어지는 편차 $y_i-\hat{y}_i=y_i-(a+bx_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 의 합으로 n개의 점들과 직선의 접근정도를 나타낼수 있는가?

2) 접근정도를 나타내는 량으로는 어떤 량을 생각할수 있는가?

$$Q=(y_1-bx_1-a)^2+(y_2-bx_2-a)^2+\ldots+(y_n-bx_n-a)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2$$

은 n개의 점과 직선의 총체적인 접근정도를 표시한다.

Q가 최소값을 가지게 하는 결수 a, b를 구하는 방법을 **최소2제곱법**이라고 부른다.

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2 \qquad (1)$$

은 a, b에 관한 2차식이다. 같기식

$$① \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$$

$$② \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}$$

가 성립한다는것을 쉽게 밝힐수 있다.

같기식 ①, ②를 리용하면

$$Q = n\left[a-\left(\bar{y}-b\bar{x}\right)\right]^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\left[b-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\right]^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$$

로 된다. 이 식으로부터 Q가 최소값을 가지자면

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}, \quad a = \bar{y}-b\bar{x}$$

또는

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \quad b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

이렇게 얻어진 직선의 방정식 $\hat{y}=a+bx$를 **회귀직선의 방정식**, 이 방정식에 의하여 정해지는 직선을 **회귀직선** 또는 **예측직선**이라고 부른다.

례 앞에서 지적된 기온자료로부터 그 지방의 4월 날씨와 관련한 온도예측직선을 구하고 12일의 온도를 예측하여라.

(풀이) 6일에 해당한 값을 $t_6=0$이라고 놓고 자료를 다시 만들면

$t_1=-5$, $t_2=-4$, $t_3=-3$, $t_4=-2$, $t_5=-1$, $t_6=0$, $t_7=1$,

$t_8=2$, $t_9=3$, $t_{10}=4$, $t_{11}=5$

로 되게 할수 있다. 공식을 리용하기 위해 표를 만들면

No	t_i	y_i	$t_i y_i$	t_i^2
1	-5	10	-50	25
2	-4	11	-44	16
3	-3	13	-39	9
4	-2	14	-28	4
5	-1	16	-16	1
6	0	14.5	0	0
7	1	14	14	1
8	2	15	30	4
9	3	17	51	9
10	4	18	75	16
11	5	19	95	25
계	0	161.5	85	110

$$a=\frac{161.5}{11}=14.68,\quad b=\frac{85}{110}=0.77$$

따라서 예측직선은

$$\hat{y}=14.68+0.77t$$

이 식으로부터 $t=6$에 해당한 $\hat{y}$값을 구하면

$$\hat{y}=14.68+0.77\cdot 6=19.3$$

따라서 $19.3^{\circ}\mathrm{C}$라고 예측할수 있다.

(주의) 시간에 따라 관측되는 자료일 때에는 첫 자료의 중위값을 0으로 하는 방법으로 자료를 다시 처리하는것이 계산에 편리하다.

탐 구

어떤 공장의 5년간 생산량장성과정은 다음과 같다.

년 (x)	1	2	3	4	5
생산량 (y)	228	251	278	331	389

생산장성이 $y=ab^x$에 따라 변한다고 할 때 6년 후의 생산량을 예측하여라.

문 제

1. 두 량 x와 y사이의 측정자료가 다음과 같을 때 예측직선의 방정식을 구하여라.

x	3	5	7	9	15
y	2.5	3	4.5	8.4	10

2. 다음 표에 의한 회귀직선을 구하여라.

x	1	4	7	10	12
y	2	3.5	4	6	7.5

3. 온도에 따르는 질산나트리움염의 풀림도의 변화를 표시하는 실험공식을 얻기 위하여 여러가지 온도 (x_i)에서 풀림도 (y_i)를 측정한 결과 다음과 같은 표가 얻어졌다.

온도(x_i)	0	4	10	15	21	29	36	51	68
풀림도(y_i)	36.7	76.0	76.3	80.6	85.7	92.9	99.4	113.6	125.1

온도와 풀림도가 직선관계에 있다고 보고 $x_i = 80$에서의 풀림도를 구하여라.

련 습 문 제

1. 어떤 구의 직경을 30번 반복 측정하여 평균값 14mm, 표준편차 0.7mm를 얻었다. 측정값이 정규분포에 따른다고 할 때 이 구의 직경을 믿음도 95%로 추정하여라.
2. 20개의 조명등의 수명을 측정하여 평균값 3 000시간, 표준편차 20시간을 얻었다. 이 조명등의 수명을 믿음확률 0.95로 추정하여라.
3. 어떤 량에 대한 측정값이 4.78, 4.79, 4.76, 4.79, 4.77, 4.78, 4.76, 4.78, 4.79, 4.78일 때 모평균값을 믿음도 99.7%로 추정하여라.
4. 시비량과 알곡수확고사이의 관계가 다음 표로 주어졌다.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	15	20	25	30	35	40	45
y_i	330	345	365	405	445	450	455

x_i 는 시비량이고 y_i 는 대응하는 알곡수확고이다. 단위는 kg이다.

이 표를 리용하여 28kg, 150kg을 시비할 때 알곡수확고를 각각 구하여라.

5. 어떤 공장에서 매 달 x(단위 만개)개의 제품을 생산하여 y원(단위 만원)의 수입을 얻는데 년간 생산실적은 다음 표로 표시된다.

생산실적을 특징짓는 회귀직선을 구하여라.

x	1.08	1.12	1.19	1.28	1.36	1.48	1.59	1.68	1.80
y	2.25	2.40	2.55	2.64	2.75	2.92	3.03	3.14	3.26

복습문제

1. 수자 1, 1, 2, 2, 3을 가지고 만든 세 자리수들의 모임에서 아무렇게나 한개를 선출하였을 때 그 수가 200보다 크고 300보다 작은 수일 확률을 구하여라.
2. 100개까지의 자연수들가운데서 임의로 선택한 수가 7로 완제될 확률을 구하여라.
3. 100개의 제품가운데 불합격품이 5개 있다. 여기서 아무렇게나 5개 잡았을 때

   1) 불합격품이 하나도 없을 확률을 구하여라.

   2) 적어도 한개의 불합격품을 포함하는 경우의 확률을 구하여라.
4. 10명의 사람이 0부터 9까지의 수자를 각각 한개씩 쓸 때 10명이 다 다른 수자를 쓸 확률을 구하여라.
5. 승강기가 7명의 사람을 태우고 10개의 층에 멎는다. 같은 층에서 2명이상 내리지 않을 확률을 구하여라.
6. 12명의 남학생과 8명의 녀학생이 있다. 20명의 학생가운데서 6명을 선수로 뽑으려고 한다. 이때 남학생 4명, 녀학생 2명이 뽑히울 확률을 구하여라.
7. 수자 1을 쓴 카드가 5매, 3을 쓴 카드가 3매, 5를 쓴 카드가 2매 있다. 임의로 3매의 카드를 잡을 때

1) 적어도 두매의 카드에 쓴 수자가 같은 확률을 구하여라.

2) 3매의 카드에 쓴 수자의 합이 7로 될 사건의 확률을 구하여라.

8. 자동보총사격에서 10점에 맞힐 확률은 0.7, 9점에 맞힐 확률은 0.3이다. 3발 사격하여 29점이상 맞힐 확률을 구하여라.

9. 길이가 10인 비트렬 (수자 0또는 1로 이루어진 10자리수자렬)을 우연적으로 발생시킨다. 다음의 경우에 비트렬이 0을 포함하지 않을 확률을 구하여라.

1) 비트 0과 비트 1의 발생확률이 같을 때

2) 비트 1의 발생확률이 0.6일 때

10. 길이가 4인 비트렬을 임의로 선택할 때 첫 비트가 1이라는 조건에서 비트렬에 적어도 2개의 0이 련이어있을 확률은 얼마인가?

11. 매 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 0.2이다. 시행을 사건 A가 나타날 때까지 진행한다고 할 때 4번째만에 사건 A가 나타날 확률을 구하여라.

12. 5개의 흰 공과 5개의 검은 공이 들어있는 통에서 임의로 공을 1개씩 5번 꺼내는데 매번 꺼냈던 공을 다시 넣는다.

1) 흰 공을 3번 꺼낼 확률을 구하여라.

2) 적어도 한번 흰 공을 꺼낼 확률을 구하여라.

13. 주사위를 60번 던질 때 웃면에 1의 눈이 나오는 회수 x의 기대값과 표준편차를 구하여라.

14. 통안에 흰 공이 7개, 붉은 공이 3개 들어있다. 여기서 꺼낸 공은 다시 통에 넣지 않으면서 통에서 아무렇게나 공을 하나씩 꺼내는데 붉은 공이 나오면 그만 둔다고 한다. 꺼낸 흰 공의 개수 x의 기대값과 그의 표준편차를 구하여라.

15. 어느 제1중학교 500명 학생들의 키는 평균값이 163.4cm, 표준편차가 5.6cm인 정규분포에 따른다. 다음의 키를 가진 학생은 전체의 몇%인가?

1) 152.2cm이상 174.6cm이하　　2) 157.8cm이상 169cm이하

3) 174.6cm이상　　4) 146.6cm이상

16. 한번의 시행에서 나타날 확률이 0.5인 사건 A가 1 000번의 독립시행에서 400~600번 나타날 확률이 0.97보다 크다고 할수 있는가?

17. 다음 표는 어느 학급의 학생 40명에 대한 몸질량의 급분류빈도수분포표이다.

몸질량(kg)	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	계
빈도수(명)	5	10	14	8	3	40

몸질량의 평균값과 표준편차를 구하여라.

18. 모집단이 다음과 같은 분포에 따를 때 크기 100인 임의의 표본평균은 어떤 분포에 따른다고 볼수 있는가?

1) 모집단은 $n = 1\,000$, $P = 0.2$ 인 2마디분포에 따른다.

2) 모집단은 정규분포 $N(50,\ 10^2)$에 따른다.

19. 표준편차가 σ 인 정규분포에 따르는 모집단에서 모평균을 믿음확률 $p = 0.95$ 로 추정하려고 한다. 추정구간의 너비가 0.25이하로 되게 하려면 표본의 크기 n 을 얼마로 해야 하겠는가?

20. 어떤 비행기의 속도를 15번 관측하여 다음의 결과를 얻었다.

422.2	418.7	425.6	420.3	425.8
423.1	431.0	428.2	438.3	434.0
411.3	417.2	413.5	441.3	423.0

속도가 정규분포할 때 속도의 평균값을 믿을확률 $p = 0.99$ 로 추정하여라.(단위는 ㎧)

21. 어느 산림지대에서 이깔나무의 직경을 재여 다음 표를 얻었다.

나무의 직경 (cm)	14 ~	18 ~	22 ~	26 ~	30 ~	34 ~	38 ~	42 ~	46 ~	50 ~	54 ~	58 ~	계
빈도수	10	47	98	134	114	98	53	32	22	12	3	1	324

이깔나무의 평균직경을 믿음도 95%로 추정하여라.

22. 한 직장에서 작업정량을 규정하기 위하여 부속품을 가공하는데 걸리는 시간을 확정하려고 10차례의 시험을 진행하였는데 측정한 수자자료는 다음과 같다. 회귀직선의 방정식을 구하여라.

부속품의 개수 x (개)	10 ~	20 ~	30 ~	40 ~	50 ~	60 ~	70 ~	80 ~	90 ~	100 ~
가공시간 y(분)	62	68	75	81	89	95	102	108	115	122

23. 단위체적의 콩크리트에 들어있는 세멘트의 량 x(kg)와 28일 후 콩크리트의 누름세기 y(kg/cm^2)의 측정자료가 다음과 같다.

x	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
y	56.9	58.3	61.6	64.6	68.1	71.3	74.1	77.4	80.2	82.6

회귀직선의 방정식을 구하여라.

24. 학급학생들의 키와 몸질량을 측정하여 수자자료를 얻은 다음 회귀직선의 방정식을 구하여라.

새로 나온 수학 — 모호수학

지금 우리가 배우고있는 모임에서는 어떤 원소가 그 모임에 속하는가 속하지 않는가가 명백히 정해지는것만 생각한다. 이와 같이 지금까지 우리가 배워온 모임은 원소의 소속성이 명백한것만 생각하여왔다.

그런데 우리 주변에서는 우리가 지금 알고있는 모임, 그 모임우에서 세워진 수학만으로는 풀기 힘든 문제들이 많다. 이것을 해결하기 위하여 1964년에 이란의 수학자 자데는 모호수학을 창시하였다.

원소가 어떤 모임에 속하는지 안속하는지 모호한 경우까지 생각하여 모호모임을 정의하였다.

실례로 젊은이의 모임은 모호모임으로 볼수 있는데 여기에 20살난 영철이 형님이 0.9의 속도로 들어가는 원소라면 38살난 영철이 삼촌은 0.3의 속도로 젊은 모임에 들어가는 원소로 생각하는것을 들수 있다.

우연량은 객관적우연성에 기초하여 정의되지만 모호모임은 주관적우연성에 기초하여 정의된다.

모호모임우에 세워진 수학이 모호수학이다.

모호수학이 나온 첫 30년동안에만도 지금까지 해결하기 힘들거나 전혀 해결할수 없었던것을 5 000여건이나 풀었다.

우리 나라에서도 모호수학이 활발히 연구되고있으며 많은 박사, 학사들이 나오고있다.

찾 아 보 기

편 찬 위 원 회

김용진, 김영인, 한성일, 강영백, 리호용,

김창선, 류해동, 조룡휘

총편집 교수 박사 류 해 동

수학(제 1 중학교 제 6 학년용)

제 3 판

집 필 교수 박사 허달윤, 교수 박사 서기영, 교수 박사 류해동, 주일생, 박사 방순선, 리복화,

김용남, 리호영, 최영국

심 사 심의위원회

편집 및 콤퓨터편성 김봉희

낸 곳 교육도서출판사

인쇄소 2 판발행 주체 99(2010)년 4 월 10 일

3 판인쇄 주체 101(2012)년 월 일 3 판발행 주체 101(2012)년 월 일

교-10-보-505 값 50 원